2024年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学コース

入学者選抜試験問題

【基礎科目】

2023年7月15日 10:00 – 11:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 問題は2題の必須問題と3題の選択問題の計5題から構成されている。受験者は必須問題の1番、2番のほか、3番から5番の選択問題の中から1題を選択して、合計で3題を解答すること。選択問題で2題以上選択した場合は、問題番号の若い1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙3枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙の全てに受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に解答する問題番号を記入し、解答用紙1枚につき1題を解答すること。
解答用紙の裏面を用いる場合は、解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 試験終了後は解答用紙3枚全てを提出すること。 2題以下しか解答していない場合でも、解答予定の問題番号を記入し、必ず3枚の解答用紙を提出すること。

(8) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

$\mathbb{R}$ を実数の全体とする．

1 (必須問題)

行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & -5 & 7 \\ 6 & 7 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

とする．次の各問に答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) B の rank（階数）を求めよ．

(3) 3 行 4 列の行列 D が $BC = BD$ を満たすとき，$C = D$ であることを示せ．

2 (必須問題)

次の各問に答えよ．

(1) x, y を正数とするとき，$\lim_{n\to\infty} \left(x^n + y^n\right)^{1/n} = \max\{x, y\}$ を示せ．ただし $\max\{x, y\}$ は x, y の小さくない方とする．

(2) x のベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) x^{2n}$ の収束半径を求めよ．

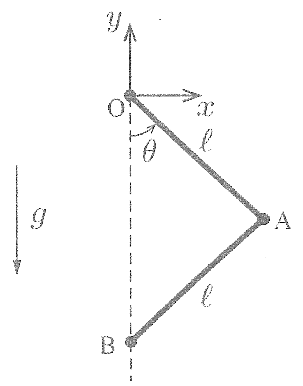
3 (選択問題)

下図のように，鉛直上方を y 軸の正方向とする鉛直面内の直交座標系 O-xy 上において，質量 m および長さ ℓ の一様な細い棒 OA が，固定点 O のまわりを滑らかに回転することができるとする．また，棒 OA と同一な棒 AB が棒 OA の端 A に蝶つがいによって滑らかに繋がっており，棒 AB の他端 B は y 軸上に滑らかに拘束されているとする．最初に端 B に鉛直上方の力を加えたところ，2 本の棒は OA と y 軸の負方向がなす角度 θ が $\theta = \theta_0$ $(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$ となる位置で静止した．この状態から時刻 $t = 0$ に端 B を静かに放すと，2 本の棒は y 軸とぶつかることなく $\theta = 0$ を θ の振動の中心とするような周期 T の周期運動を始めた．θ は時刻 t の関数であり，θ の時間微分を $\dot{\theta}$ と表す．重力加速度の大きさを g として，以下の各問に答えよ．なお，質量 m および長さ ℓ の一様な細い棒の重心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $\dfrac{m\ell^2}{12}$ である．

(1) 最初の静止状態において y 軸が端 B に及ぼす力の x 方向成分を m，g，ℓ，θ_0 のうち必要なものを用いて表せ．

(2) 時刻 $t > 0$ における系の全運動エネルギーを m，g，ℓ，θ，$\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ．

(3) $|\theta| \ll 1$ のとき，周期 T を m，g，ℓ のうち必要なものを用いて表せ．



4 (選択問題)

正の整数 n に対して, n 行 n 列の単位行列を E_n と表わす. また, 全ての成分が整数であるような n 行 n 列の行列全体のなす集合を $M_n(\mathbb{Z})$ で表わす. 次の各問に答えよ.

(1) $n=2$ のとき, $X^2=3E_2$ を満たす $X \in M_2(\mathbb{Z})$ が存在することを示せ.

(2) n が 4 以上の偶数であるとき, $X^2=3E_n$ を満たす $X \in M_n(\mathbb{Z})$ は存在するか. 理由を付して答えよ.

(3) n が奇数であるとき, $X^2=3E_n$ を満たす $X \in M_n(\mathbb{Z})$ は存在するか. 理由を付して答えよ.

5 (選択問題)

$\mathbb{R}^3$ において,

$$x^2+4y^2 \leq 4x, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2+x}$$

の共通部分の体積を求めよ.

2024年度4月期

京都大学大学院情報学研究科修士課程
先端数理科学コース

入学者選抜試験問題

【専門科目】

2023年7月15日 13:00 – 14:30

(1) 指示があるまで問題を見てはならない。

(2) 参考書・ノート類の持ち込みを禁止する。

(3) 解答時間は1時間30分である。退室は認めない。

(4) 問題は全部で5題の問題から構成されており、全て選択問題である。この中から1題を選択して解答すること。2題以上選択した場合は、問題番号の若い1題のみを採点対象とする。

(5) 各受験者に対し、解答用紙1枚と下書用紙(計算用紙)が配布される。開始後、解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。

(6) 解答にあたっては、解答用紙の所定欄に解答する問題番号を記入し、解答に際して裏面を用いる場合は解答用紙の指示に従って解答すること。

(7) 問題用紙・下書用紙は持ち帰ること。

1 次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$0 \leq x \leq 1$ 上の実数値関数 $f(x)$ は C^1 級で，$0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ かつ $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ とする．このとき，$0 \leq x \leq 1$ 上の実数値連続関数 $\varphi(x)$ を未知関数とする関数方程式

$$(*) \qquad \varphi(x) = x(1-x) + f\big(\varphi(x)\big) \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

を考える．

(1) 関数方程式 $(*)$ を満たす $\varphi(x)$ が存在するとき，この $\varphi(x)$ は一意的であることを示せ．

(2) 関数方程式 $(*)$ を満たす $\varphi(x)$ が存在することを示せ．

問 2　$F(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円周 $\{\, z \mid |z| = 1\}$ 上の z の正則関数である．このとき $f(\theta) = F(e^{i\theta})$ によって定義される $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 上の関数 $f(\theta)$ の Fourier 級数展開を

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}}$$

とする．このとき，ある正数 C と，$0 < r < 1$ を満たすある正数 r が存在し，Fourier 係数 $\{c_n(f)\}$ は

$$\big|c_n(f)\big| \leq C r^{|n|} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

を満たすことを示せ．

2　次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　$u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ．

問 2　複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ と表す．$\mathrm{Re}(z) > 0$ のとき，複素 Γ-関数を

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

によって定める．以下の設問に答えよ．

(1) $\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 0$ の領域の正則関数であることを証明し，$\mathrm{Re}(z) > 0$ において $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ が成立することを証明せよ．

(2) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ の関係を用いて $\Gamma(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続 (解析的延長) し，その有理型関数を改めて $\Gamma(z)$ と表すことにする．このとき負の整数 m に対して，$z = m$ における $\Gamma(z)$ の留数を求めよ．

問 3　xy 平面の点 (α, β) の近傍で定義された C^2 級の実数値関数 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ は，$f(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta) = 0$ を満たしている．このとき，一般に非線型な連立方程式

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

の解 (α, β) の近似値を Newton 法によって求めることを考える．

(1) Newton 法による点列を $\{(x_n, y_n)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ と表すとき，この連立方程式に対する Newton 法のアルゴリズムを記せ．解答に際しては Newton 法のアルゴリズムの導出について説明する必要はなく，またアルゴリズムの停止性についての説明も必要ない．

(2) 2 つの平面ベクトル $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta), \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \beta)\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta), \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \beta)\right)$ が 1 次独立のとき，初期値 (x_0, y_0) を (α, β) の十分近くにとれば Newton 法による点列 $\{(x_n, y_n)\}$ は点 (α, β) に収束することを説明せよ．

3

次の各問のそれぞれに答えよ．

問 1　xyz 空間の半球面 S を

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$$

とする．ベクトル場 $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x^3}{3} + z^2 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^3}{3} \\ x^2 y + \dfrac{y^3}{3} \end{pmatrix}$ に対して

曲面積分

$$\int_S (wy - vz)\ dS$$

の値を求めよ．ここに，dS は曲面 S の面積要素である．

問 2　xy 平面の領域を $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ とし，その境界を ∂D と表す．D の内部に熱源を持ち，境界上での温度が 0 である場合の定常熱伝導の数理モデルは，点 (x, y) における温度を $u(x, y)$，熱伝導率を c，熱源の分布を $\varphi(x, y)$ とすると，

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c \nabla u(x, y)) = \varphi(x, y), & (x, y) \in D \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial D \end{cases} \tag{$*$}$$

であることが知られている．

(1) $0 \leq x \leq 1$ 上の関数 $f(x) = x(1 - x)$ を一様収束する Fourier 級数に展開せよ．

(2) $c = 1, \varphi(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)$ の場合に，変数分離の方法を利用して境界値問題 $(*)$ の解析解を求めよ．

(3) 境界値問題 $(*)$ に差分法を適用して数値的な近似解を求めることを考える．正の整数 N に対して $h = \dfrac{1}{N}$ とし，$x_i = ih,\ y_j = jh\ (0 \leq i, j \leq N)$ により格子点 (x_i, y_j) を定め，$u(x_i, y_j)$ に対応する数値解を $u_{i,j}$ と表すことにする．このとき，境界値問題 $(*)$ を近似する差分スキームを $u_{i,j}$ を用いて 1 つ与えよ．

(4) (3) で与えた差分方程式を数値解 $u_{i,j}\ (1 \leq i, j \leq N - 1)$ に対する連立方程式と見なす．このとき，この連立方程式を解くための数値解法 (アルゴリズム) を 1 つ与え，与えた数値解法の特徴について説明せよ．

4

N 個の古典的な磁気モーメントに一様な外部磁場が加わる系を考える．各磁気モーメントを大きさ1の3次元ベクトル $\boldsymbol{S}_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$ で表し，外部磁場をベクトル $h\boldsymbol{e}$ で表す．ここで，h は外部磁場の大きさを表す正の定数，$\boldsymbol{e}$ は外部磁場の方向を表す単位ベクトルである．
この系のハミルトニアンを

$$H_1 = -h\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{e}$$

とし，系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるとする．また，この系の磁化を $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{e}$ で定義する．以下の問に答えよ．ただし，ボルツマン定数を k，$\beta=\dfrac{1}{kT}$ とする．

(1) この系の分配関数を N,β,h を用いて表せ．

(2) この系の磁化の平均値 M を N,β,h を用いて表せ．

(3) $h\to 0$ の極限における，この系の磁化率 $\chi=\left.\dfrac{\partial M}{\partial h}\right|_{h=0}$ を N,β を用いて表せ．

(4) $h\to 0$ の極限における，この系の磁化の分散を β,χ を用いて表せ．

次に，これらの磁気モーメントが格子点上に配置され，隣接する磁気モーメント間で相互作用する場合を考える．一つの格子点あたりの隣接格子点数を q とする．
この系のハミルトニアンを

$$H_2 = -J\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in A(i)}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j - h\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{e}$$

とし，系は絶対温度 T の熱平衡状態にあるとする．ここで，J は磁気モーメント間の相互作用の強さを表す正の定数，$\displaystyle\sum_{j\in A(i)}$ は i 番目の格子点に隣接する全ての格子点について和を取ることを表す．また以下では，各格子点の平均隣接磁気モーメント $\displaystyle\frac{1}{q}\sum_{j\in A(i)}\boldsymbol{S}_j$ を外部磁場方向を向いた大きさ m のベクトル $m\boldsymbol{e}$ で近似する平均場近似が成立すると仮定する．

(5) 熱平衡状態では，m が磁気モーメントあたりの磁化の平均値 $\dfrac{M}{N}$ に等しいことを用いて，M が満たす方程式を求めよ．

(6) この系にはある臨界温度 T_c が存在し，$h\to 0$ の極限における磁化率が $T=T_c$ で発散する．これを用いて T_c を求めよ．

5

次の各問のそれぞれに答えよ.

問 1

x 軸に沿う 1 次元流の非定常流速場を $u(x,t) = \dfrac{xt}{1+t^2}$ とする. ただし t は時刻を表す.

(1) 時刻 $t=0$ に $x=1$ にある流体粒子の時刻 t における位置を $X(t)$ とする. $X(t)$ を求めよ.

(2) 位置 x にある流体粒子の加速度を時刻 $t=1$ の場合に求めよ.

問 2

$x\,y\,z$ 空間における非圧縮性粘性流体の定常な運動を考える. 流速の成分を (u,v,w), 圧力を p と表す. u, w はある正数 a および実数 b を用いて

$$u = -ax, \quad w = bz$$

で与えられるとする. さらに $v = v(x)$ は U を定数として,

$$v(0) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = U$$

を満足し, また, $p = p(x,z)$ とする. 流体に外力は働かないとする. この流体の動粘性係数を ν, 密度を ρ とするとき, 以下の設問に答えよ.

(1) a と b の関係を与え, さらに (u,w) の描く流線の概形を $x\,z$ 平面上に図示せよ.

(2) $p(0,0) = 0$ を満たす p を U, a, x, z, ν, ρ のうち必要なものを用いて表せ.

(3) v を U, a, x, ν, ρ のうち必要なものを用いて表せ. 解答に際し誤差関数

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-t^2)\,dt$$

を用いてもよい.

(4) この流体の渦度の z 方向成分 ω_z を求めよ. さらに a/ν が大きいときと小さいときの渦度の分布の違いについて, 流体力学的な観点から説明せよ.