微積分

$\boxed{1}$

以下の問いに答えよ.

(i) 極限値 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ を求めよ.

(ii) $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x) = e^{-\sqrt{3}x}\cos x$ の極値をすべて求めよ.

(iii) a, b を $a > b$ を満たす正数とする. $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x, y) = (ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の極値をすべて求めよ.

(iv) 次の不定積分を求めよ.

$$\int (\log x)^2 dx$$

(v) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2x\}$ として，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x}\, dxdy$$

An English Translation:

Calculus

1

Answer the following questions.

(i) Find the limit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

(ii) Find all the extreme values of the function $f(x) = e^{-\sqrt{3}x}\cos x$ defined on $\mathbb{R}$.

(iii) Let a and b be positive numbers satisfying $a > b$. Find all the extreme values of the function $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ defined on $\mathbb{R}^2$.

(iv) Compute the indefinite integral

$$\int (\log x)^2 dx.$$

(v) Let $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2x\}$. Compute the double integral

$$\iint_D \sqrt{x}\, dx dy.$$

線形代数

$\boxed{2}$

次で与えられる3次正方行列Aについて考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(i) 行列Aの行列式を求めよ.

(ii) 行列Aの固有値をすべて求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(iii) $B = P^{-1}AP$となるような正則行列Pと対角行列Bを求めよ.

(iv) x, y, zに関する連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y - z & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 1 \\ x + z & = & 0 \end{cases}$$

を解け.

An English Translation:

Linear Algebra

$\boxed{2}$

Consider the 3×3 matrix A given by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(i) Find the determinant of the matrix A.

(ii) Find all the eigenvalues of the matrix A and an eigenvector corresponding to each eigenvalue.

(iii) Find the nonsingular matrix P and diagonal matrix B such that $B = P^{-1}AP$.

(iv) Solve the simultaneous linear equations

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + z &= 0 \end{cases}$$

for x, y and z.

複素関数/フーリエ解析

$\boxed{1}$

r, s を $|r| < 1, |s| < 1$ を満たす実数とする．以下の問いに答えよ．

(i) C を複素平面における原点を中心とする半径 1 の円とする．積分

$$\int_C \frac{1}{(1-sz)(z-r)(1-rz)} dz$$

を求めよ．ただし，積分は C を反時計回りの向きに回るものとする．

(ii) 積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-se^{i\theta})(1-2r\cos\theta+r^2)} d\theta$$

を求めよ．

(iii) n を自然数とする．積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} d\theta$$

を求めよ．

An English Translation:

Complex Functions/Fourier Analysis

1

Let r and s be real numbers satisfying $|r| < 1$ and $|s| < 1$. Answer the following questions.

(i) Let C be the circle with a radius of 1 centered at the origin on the complex plane. Find the integral

$$\int_C \frac{1}{(1-sz)(z-r)(1-rz)}dz,$$

where the integral is taken in the counterclockwise direction along C.

(ii) Find the integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-se^{i\theta})(1-2r\cos\theta+r^2)}d\theta.$$

(iii) Let n be a positive integer. Find the integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta.$$

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純強連結有向グラフとし，V に属する節点の個数を n，E に属する枝の本数を m とする．G の各枝 $e \in E$ に実数値重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークを $N=[G,w]$ とする．節点 u から節点 v への有向枝は (u,v) と書き，その枝重みは $w(u,v)$ とも書く．節点 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ をこの順に訪れる路 $P=(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ について，枝の本数を $\mu(P) \triangleq k-1$，枝重みの和を $\omega(P) \triangleq \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$ と書く．

節点 $s \in V$ が与えられたものとする．各節点 $v \in V$ について，s から v への路 P で $\mu(P) \leqq n-1$ を満たすものにおける $\omega(P)$ のうち，最小値を $d(v)$ と定める．また s から v への単純路 S における $\omega(S)$ のうち，最小値を $d^*(v)$ と定める．$\omega(C)<0$ を満たす閉路 C を負閉路と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) N に負閉路が存在しないとき，かつそのときに限り，

$$d(u)+w(u,v) \geqq d(v), \quad \forall (u,v) \in E$$

が成り立つことを示せ．

(ii) N に負閉路が存在するか否かを判定し，もし存在しない場合にはすべての $v \in V$ に対して $d^*(v)$ を出力する，$O(mn)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E, let n denote the number of vertices in V, and let m denote the number of edges in E. Let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. When a path $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ visits vertices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in this order, let $\mu(P) \triangleq k - 1$ denote the number of edges in P and let $\omega(P) \triangleq \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$ denote the summation of weights of edges in P.

Suppose that a vertex $s \in V$ is given. For each vertex $v \in V$, we define $d(v)$ to be the minimum of $\omega(P)$ among all paths P from s to v such that $\mu(P) \leqq n - 1$. We define $d^*(v)$ to be the minimum of $\omega(S)$ among all simple paths S from s to v. A cycle C is called a negative cycle if $\omega(C) < 0$. Answer the following questions.

(i) Prove that there is no negative cycle in N if and only if

$$d(u) + w(u, v) \geqq d(v), \quad \forall (u, v) \in E.$$

(ii) Show an $O(mn)$-time algorithm that determines whether or not there exists a negative cycle in N and that outputs $d^*(v)$ for all $v \in V$ if no negative cycle exists.

凸最適化

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ とする．ただし，$^\top$ は転置記号を表す．
次の線形計画問題 P を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}: & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \leqq 1 \\
& & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし，問題 P の決定変数は $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ である．
以下の問 (i) と (ii) に答えよ．

(i) 問題 P の双対問題を書け．

(ii) 問題 P が最適解を持つことを示せ．

問題 P の最適解の集合を Y とする．
以下の問 (iii) と (iv) に答えよ．

(iii) Y が凸集合となることを示せ．

(iv) $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$ かつ $c_1 < 0$ とする．次の最適化問題 Q を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{Q}: & \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in Y
\end{array}
$$

ただし，問題 Q の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．カルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて，問題 Q の最適解を一つ求めよ．

An English Translation:

Convex Optimization

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, where the superscript $^\top$ denotes transposition.

Consider the following linear programming problem P:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \leqq 1 \\ & & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where the decision variable of problem P is the vector $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Write out a dual problem of problem P.

(ii) Show that problem P has an optimal solution.

Let Y be the set of optimal solutions of problem P.

Answer the following questions (iii) and (iv).

(iii) Show that Y is a convex set.

(iv) Suppose that $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$ and $c_1 < 0$. Consider the following optimization problem Q:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}: & \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in Y, \end{array}$$

where the decision variable of problem Q is the vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Obtain an optimal solution of problem Q by using Karush-Kuhn-Tucker conditions.

制御理論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．以下の問いに答えよ．

(i) 可制御性の定義を述べよ．また，システムが可制御であるとき，

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

はフルランクであることを証明せよ．

以下では，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする．

(ii) このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ．

(iii) $u(t) = \sin t$ のとき，十分大きい $t > 0$ に対する $y(t)$ を求めよ．

(iv) r を正の定数とするとき，$J(u) = \displaystyle\int_0^\infty \left(y(t)^2 + ru(t)^2\right) dt$ を最小化する $u(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output. Answer the following questions.

(i) Describe the definition of controllability. Prove that the matrix

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

has full rank if the system is controllable.

In what follows, let

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Determine the controllability and observability of this system.

(iii) Let $u(t) = \sin t$. Obtain $y(t)$ for sufficiently large $t > 0$.

(iv) Let r be a positive constant. Find $u(t)$ that minimizes $J(u) = \displaystyle\int_0^\infty \left(y(t)^2 + ru(t)^2\right) dt$.

統計力学

$\boxed{5}$

N, k, l は正の整数で $k \leqq N, l \leqq N$ を満たし，$u_l\ (l = 1, 2, ..., N)$ は実確率変数で $\langle u_l \rangle = 0$, $\langle u_l^2 \rangle = 1$, かつ $k \neq l$ のとき $\langle u_k u_l \rangle = 0$ を満たすものとする．ここで $\langle A \rangle$ は A の期待値である．次式で定義される N 歩のランダムウォークを考える．

$$x_0 = 0, \qquad x_i = x_0 + \sum_{l=1}^{i} u_l \quad \text{for} \quad i = 0, 1, 2, ..., N$$

ランダムウォークの重心を次のように定義する．

$$\bar{x} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} x_i$$

以下の問いに答えよ．

(i) $\langle x_N \rangle$ と $\langle x_N^2 \rangle$ を N を用いて表せ．

(ii) 次式が成り立つことを示せ．

$$\langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle x_i x_j \rangle$$

(iii) $\langle \bar{x} \rangle$ と $\langle \bar{x}^2 \rangle$ を N を用いて表せ．

(iv) 次の期待値を N を用いて表せ．

$$\left\langle \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle$$

An English Translation:

Statistical Mechanics

5

Let N, k, l be positive integers and satisfy $k \leqq N$ and $l \leqq N$. Let u_l for $l = 1, 2, ..., N$ be real random variables such that $\langle u_l \rangle = 0$, $\langle u_l^2 \rangle = 1$ and $\langle u_k u_l \rangle = 0$ if $k \neq l$. Here $\langle A \rangle$ is the expected value of A. Consider an N-step random walk defined by

$$x_0 = 0, \qquad x_i = x_0 + \sum_{l=1}^{i} u_l \quad \text{for} \quad i = 0, 1, 2, ..., N.$$

Define the center of mass of the random walk as

$$\bar{x} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} x_i.$$

Answer the following questions.

(i) Write $\langle x_N \rangle$ and $\langle x_N^2 \rangle$ in terms of N.

(ii) Show the following equation holds:

$$\langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle x_i x_j \rangle.$$

(iii) Write $\langle \bar{x} \rangle$ and $\langle \bar{x}^2 \rangle$ in terms of N.

(iv) Write the following expected value in terms of N:

$$\left\langle \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle.$$

常微分方程式

$\boxed{6}$

$a(t), b(t) \not\equiv 0$ を t の多項式として次の微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \tag{1}$$

k をある自然数として $x = t^k$ が解であるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) k を定めよ．

(ii) $a(t)$ を $b(t)$ を用いて表わせ．

(iii) 式 (1) は $x = t^k$ と線形独立な有理関数解をもたないことを示せ．

An English Translation:

Ordinary Differential Equations

$\boxed{6}$

Let $a(t), b(t) \not\equiv 0$ be polynomials of t and consider the differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{1}$$

Assume that $x = t^k$ is a solution, where k is a positive integer. Answer the following questions.

(i) Determine k.

(ii) Express $a(t)$ in terms of $b(t)$.

(iii) Show that Eq. (1) has no rational function solution that is linearly independent of $x = t^k$.