2022 年度 10 月期入学 / 2023 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2022 年 8 月 5 日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 11 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
   - F1-1, F1-2　　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4 ページ
   - F2-1, F2-2　　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-10 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2022 Admissions / April 2023 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 5, 2022
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 11 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   - F1-1, F1-2　　Linear Algebra, Calculus ………………… Pages 1 to 4
   - F2-1, F2-2　　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 10
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の行列 A に対して、$A = LU$ を満たす下三角行列 L と上三角行列 U を求めよ。ただし L の対角成分はすべて 1 とする。

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -2 & 7 & -9 \\ 42 & 59 & 7 & -53 & 56 \\ 30 & 37 & -8 & -35 & 30 \\ -42 & -47 & 30 & 35 & -33 \\ 12 & 18 & 20 & -64 & 43 \end{pmatrix}$$

設問 2　四元数の実 4 次正方行列表現における基底元は以下のように定義される。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下の問いに答えよ。次の等式を用いてもよい。

$$IJ = K,\ JK = I,\ KI = J,\ JI = -K,\ KJ = -I,\ IK = -J,\ I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E$$

(1) $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ とし、$Q = aE + bI + cJ + dK, \overline{Q} = aE - bI - cJ - dK$ として $Q\overline{Q}$ を求めよ。

(2) I^{-1} と Q^{-1} を求めよ。ただし $(a, b, c, d) \neq \mathbf{0}$ とする。

(3) 実 4 次正方行列の集合 M は非可換環である。この部分集合 $H = \{Q \mid \forall(a, b, c, d)\}$ も非可換環であるための以下の必要条件を証明せよ。

(a) H は加法に対して閉じている。

(b) 加法交換則が成り立つ。

(c) 加法結合則が成り立つ。

(d) 加法に対する零元が存在する。

(e) 加法に対する逆元が存在する。

(f) H は乗法に対して閉じている。

(g) 乗法結合則が成り立つ。

(h) 乗法分配則が成り立つ。

(i) 乗法は非可換である。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Calculate the matrices L and U satisfying $A = LU$ for matrix A below, where L is a lower triangular matrix with 1's on the diagonal and U is an upper triangular matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -2 & 7 & -9 \\ 42 & 59 & 7 & -53 & 56 \\ 30 & 37 & -8 & -35 & 30 \\ -42 & -47 & 30 & 35 & -33 \\ 12 & 18 & 20 & -64 & 43 \end{pmatrix}$$

Q.2 We define the basis elements of a real 4-dimentional matrix representation of quaternions as follows:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions. You may use the following equations:

$$IJ = K,\ JK = I,\ KI = J,\ JI = -K,\ KJ = -I,\ IK = -J,\ I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E.$$

(1) Let $Q = aE + bI + cJ + dK$ and $\overline{Q} = aE - bI - cJ - dK$, where $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculate $Q\overline{Q}$.

(2) Calculate I^{-1} and Q^{-1}, where $(a, b, c, d) \neq \mathbf{0}$.

(3) The set of real 4-dimentional matrices M is a noncommutative ring. Prove the following necessary conditions for a subset $H = \{Q \mid \forall(a, b, c, d)\}$ to also be a noncommutative ring.

- (a) H is closed for the addition.
- (b) The addition is commutative.
- (c) The addition is associative.
- (d) There exists a zero element for the addition.
- (e) There exists an inverse element for the addition.
- (f) H is closed for the multiplication.
- (g) The multiplication is associative.
- (h) The multiplication is distributive.
- (i) The multiplication is noncommutative.

修士課程　情報学基礎　【線形代数、微分積分】 | 問題番号 | F1–2 |

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の関数の x に関する n 階導関数を求めよ。ただし a は実数、かつ $a > 0$、$a \neq 1$ である。

(1) $\log_{\mathrm{e}} x$

(2) a^x

(3) $x^2 \mathrm{e}^x$

(4) $\frac{1}{x^2-1}$

設問 2　$z = f(x, y), x = \mathrm{e}^u \cos v, y = \mathrm{e}^u \sin v$ とする。
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ を $x, y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ で表せ。

設問 3　以下の積分を求めよ。計算過程を明示すること。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (ax^2 + by^2) \mathrm{e}^{-(ax^2+by^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$　但し、$a > 0$ かつ $b > 0$ とし、(1) の結果を用いてよい。

Master's Program	Fundamentals of Informatics	[Linear Algebra, Calculus]	Question Number	F1–2

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Find the n-th derivative of the following functions with respect to x, where a is a real number and $a > 0$ and $a \neq 1$.

(1) $\log_{\mathrm{e}} x$

(2) a^x

(3) $x^2 \mathrm{e}^x$

(4) $\frac{1}{x^2-1}$

Q.2 Let $z = f(x, y), x = \mathrm{e}^u \cos v$, and $y = \mathrm{e}^u \sin v$.

Express $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ in terms of $x, y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, and $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Q.3 Solve the following integrals. Derivations must be clearly shown.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \,.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (ax^2 + by^2)\mathrm{e}^{-(ax^2+by^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,,$ where $a > 0$ and $b > 0$. You may use the result of (1).

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　自然数 n の関数 $f(n)$ に対するビッグオー記法 $f(n) = O(g(n))$ を考える。ここで、$g(n)$ は自然数 n の関数である。以下に示す各 $f(n)$ について、最も簡潔な形を持つ $g(n)$ を答えよ。

(1) $f(n) = 5\log n + 2(\log n)^3 + 3n^3$

(2) $f(n) = n\log n + 10n^2 + 100n$

(3) $f(n) = 4n! + 2n^n + 8n\log n$

設問 2　スタックマシンを用いて計算式 $((5-3)*2)+((7-4)/(2+1))$ の値を求めることを考える。ここで、“+” は加算、“−” は減算、“*” は乗算、“/” は除算を表す。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 上記の計算式に対応する構文木を図示せよ。

(2) 上記の計算式に対応する逆ポーランド記法（後置記法）を示せ。

(3) 構文木を走査することで逆ポーランド記法を出力する擬似コードを示せ。ただし、再帰呼び出しを用いること。

(4) 上記の計算式の値を得るまでのスタックの変化を図示せよ。

設問 3　互いに異なる n 個の正の整数の集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ と非負の整数 s を考える。正の整数 $i\ (\leq n)$ および非負の整数 $j\ (\leq s)$ について、$d(i,j)$ は、$A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ の部分集合 A'_i であって、$\sum_{a\in A'_i} a = j$ を満たすものの数を表すものとする。

(1) $A = \{10, 3, 6, 13, 11, 4\}$ とする。$d(4,16)$ と $d(6,20)$、また、それぞれに対して等式を満たす部分集合をすべて求めよ。

(2) $d(i,j)$ を、$\{d(i-1,k)\}_{0\leq k\leq j}$ のうちのいくつかを用いて表せ。ただし、便宜上 $d(0,0)=1, d(0,1)=0, d(0,2)=0, \ldots, d(0,j)=0$ とする。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Consider the big O notation $f(n) = O(g(n))$ for a function $f(n)$ of a natural number n, where $g(n)$ is another function of n. Answer $g(n)$ having the simplest expression for each $f(n)$ defined below.

(1) $f(n) = 5\log n + 2(\log n)^3 + 3n^3$

(2) $f(n) = n\log n + 10n^2 + 100n$

(3) $f(n) = 4n! + 2n^n + 8n\log n$

Q.2 Suppose the value of a mathematical expression $((5-3)*2)+((7-4)/(2+1))$ is computed using a stack machine, where "$+$", "$-$", "$*$", and "$/$" represent addition, subtraction, multiplication, and division, respectively. Answer the following questions.

(1) Draw the syntactic tree corresponding to the mathematical expression.

(2) Show the reverse Polish notation (postfix notation) corresponding to the mathematical expression.

(3) Show a pseudocode that outputs the reverse Polish notation by traversing the syntactic tree. Recursion must be used.

(4) Draw the change of the stack until the value of the mathematical expression is obtained.

Q.3 Consider a set $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ of n distinct positive integers and a non-negative integer s. For a positive integer i ($\leq n$) and a non-negative integer j ($\leq s$), let $d(i,j)$ denote the number of subsets A_i' of $A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ satisfying $\sum_{a\in A_i'} a = j$.

(1) Let $A = \{10, 3, 6, 13, 11, 4\}$. Compute $d(4,16)$ and $d(6,20)$, and for each of them, find all the subsets satisfying the equality.

(2) Express $d(i,j)$ using some elements of $\{d(i-1,k)\}_{0\leq k\leq j}$. Let $d(0,0) = 1$, $d(0,1) = 0$, $d(0,2) = 0, \ldots, d(0,j) = 0$ for convenience.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 $G = (V, E)$ を有向グラフとする。ここで、V は G の頂点集合、E は G の辺集合である。頂点 u から頂点 v への有向辺は順序対 $(u, v) \in E$ で表され、距離 $l(u, v) > 0$ を持つ。頂点は 1 から N で番号付けられており、$V = \{1, \ldots, N\}$ である。有向グラフの例を図 1 に示す。各辺に付された数値はその辺の距離を表す。

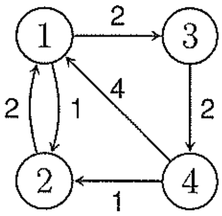

図 1

頂点 v_1 から頂点 v_m へと有向辺をたどって到達できるとき、この経路 p を $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ で表す。v_1, v_m を除く p の頂点を中間頂点とよぶ。経路 p の距離は $l(p) = \sum_{i=1}^{m-1} l(v_i, v_{i+1})$ で与えられる。頂点 u から頂点 v への最短経路は、頂点 u から頂点 v へのすべての経路のうち距離が最小のものである。

(1) 図 1 のグラフにおける頂点 4 から頂点 3 への最短経路とその距離を求めよ。

(2) 経路 $p = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m)$ は、$v_i = v_j$ $(1 \leq i < j \leq m)$ のとき、閉路を含むという。任意の最短経路が閉路を含まないことを証明せよ。

（次のページに続く）

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

G のすべての頂点対に対して最短経路の距離を求める問題を考える。具体的には、頂点番号を利用した動的計画法に基づくアルゴリズムを作る。すべての中間頂点が $\{1, 2, \ldots, k\}$ に含まれるという制約下での頂点 i から頂点 j への最短経路の距離を $\delta(i, j, k)$ とする $(0 \leq k \leq N)$。条件を満たす経路が存在しないとき、$\delta(i, j, k) = \infty$ とする。また、$\delta(i, i, k) = 0$ とする。$k = 0$ のときは、中間頂点は存在しないとする。
$\delta(i, j, k)$ を使うと、元の問題はすべての i, j について $\delta(i, j, N)$ を求めることとみなせる。

(3) $1 \leq k \leq N$ のとき $\delta(i, j, k) = \min(\delta(i, j, k-1), \delta(i, k, k-1) + \delta(k, j, k-1))$ が成り立つことを示せ。

(4) $d^{(k)}$ はサイズ $N \times N$ の 2 次元配列であり、その要素の値は $d^{(k)}[i][j] = \delta(i, j, k)$ であるとする。ただし、配列は 1 で始まるインデックス方式とする。図 1 のグラフに対して、$d^{(0)}, \ldots, d^{(4)}$ をこの順番で求めることで、すべての頂点対に対して最短経路の距離を求めよ。

(5) (4) はこのアルゴリズムが $N+1$ 個の 2 次元配列を必要とすることを示唆するが、実際には 1 個の 2 次元配列を用意すればすむことを示せ。

(6) (5) の結果を用いると次のアルゴリズムを導ける。下の空欄 (a) および (b) を埋めよ。

Algorithm 1 すべての頂点対に対して最短経路の距離を求める

```
N × N の配列 d を値 ∞ で初期化
for i ∈ V do
    d[i][i] ← 0
end for
for (i, j) ∈ E do
    d[i][j] ← l(i, j)
end for
for k ∈ {1, ..., N} do
    for i ∈ {1, ..., N} do
        for j ∈ {1, ..., N} do
            if [    (a)    ] then
                [    (b)    ]
            end if
        end for
    end for
end for
return d
```

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q. Let $G = (V, E)$ be a directed graph. V is the vertex set of G and E is the edge set of G. A directed edge from vertex u to vertex v is represented as an ordered pair $(u, v) \in E$ and has a distance $l(u, v) > 0$. The vertices are numbered through 1 to N, and thus $V = \{1, \ldots, N\}$. An example of a directed graph is shown in Figure 1. The number attached to each edge represents the distance of the edge.

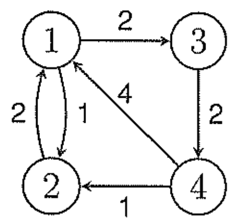

Figure 1

If vertex v_m is reachable from vertex v_1 by traversing directed edges, the corresponding path p is represented as $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. The vertices of p except v_1 and v_m are called intermediate vertices. The distance of path p is given as $l(p) = \sum_{i=1}^{m-1} l(v_i, v_{i+1})$. The shortest path from vertex u to vertex v is the one with the smallest distance among all paths from vertex u to vertex v.

(1) Compute the shortest path, and its distance, from vertex 4 to vertex 3 of the graph in Figure 1.

(2) Path $p = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m)$ is said to contain a cycle if $v_i = v_j$ $(1 \leq i < j \leq m)$. Prove that no shortest path contains a cycle.

(continued on the next page)

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

We consider the problem of computing the distance of the shortest path between every pair of vertices of G. Specifically, we will devise a dynamic programming-based algorithm that exploits vertex numbers. Let $\delta(i, j, k)$ be the distance of the shortest path from vertex i to vertex j under the constraint that all intermediate vertices are contained in $\{1, 2, \ldots, k\}$ $(0 \leq k \leq N)$. If no path satisfies the condition, $\delta(i, j, k) = \infty$. Also, we set $\delta(i, i, k) = 0$. When $k = 0$, there is no intermediate vertex. With $\delta(i, j, k)$, the original problem is recast as computing $\delta(i, j, N)$ for all i and j.

(3) Show that the following equation holds for $1 \leq k \leq N$:
$\delta(i, j, k) = \min(\delta(i, j, k-1), \delta(i, k, k-1) + \delta(k, j, k-1))$.

(4) Let $d^{(k)}$ be a two-dimensional array with size $N \times N$, with its item values being $d^{(k)}[i][j] = \delta(i, j, k)$. Note that array indexing starts with 1. For the graph in Figure 1, compute the distance of the shortest path between every pair of vertices by computing $d^{(0)}, \ldots, d^{(4)}$ in this order.

(5) (4) suggests that this algorithm requires $N + 1$ two-dimensional arrays. Show that only one array is needed in practice.

(6) Based on the result of (5), we can devise the following algorithm. Fill the blanks (a) and (b) below.

Algorithm 1 Computing the distance of the shortest path between every pair of the vertices.

```
Initialize the N × N array d with the value ∞
for i ∈ V do
    d[i][i] ← 0
end for
for (i, j) ∈ E do
    d[i][j] ← l(i, j)
end for
for k ∈ {1, ..., N} do
    for i ∈ {1, ..., N} do
        for j ∈ {1, ..., N} do
            if [        (a)        ] then
                [        (b)        ]
            end if
        end for
    end for
end for
return d
```

2022 年度 10 月期入学 / 2023 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(専門科目)

2022 年 8 月 5 日 12:00〜14:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 13 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は下記 6 題であり、日本語と英語の両方で出題されている。このうちいずれか 2 題を選択し、解答しなさい。

   S-1 認知神経科学、知覚・認知心理学 ………… 1-2 ページ
   S-2 統計学 ………… 3-4 ページ
   S-3 パターン認識と機械学習 ………… 5-6 ページ
   S-4 情報理論 ………… 7-8 ページ
   S-5 信号処理 ………… 9-10 ページ
   S-6 形式言語理論、計算理論、離散数学 ………… 11-12 ページ

5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2022 Admissions / April 2023 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

August 5, 2022
12:00 - 14:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 6 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 2 questions.**

   S-1 Cognitive Neuroscience, Cognitive and Perceptual Psychology ………… Pages 1 to 2
   S-2 Statistics ………… Pages 3 to 4
   S-3 Pattern Recognition, Machine Learning ………… Pages 5 to 6
   S-4 Information Theory ………… Pages 7 to 8
   S-5 Signal Processing ………… Pages 9 to 10
   S-6 Formal Language, Theory of Computation, Discrete Mathematics ………… Pages 11 to 12

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問　次の４つの神経科学、心理学の用語の中から２つを選択し、それぞれについて、(a) 定義、(b) １つの代表的な研究（その実験方法と結果も含む)、(c) 他の関連するトピックスについて説明せよ。なお、図を用いても良い。

(1) 視覚系における受容野

(2) 背側経路と腹側経路

(3) 実行機能

(4) 恐怖条件づけ

Q. Choose two of the following four neuroscience and psychology terms and, for each, explain (a) the definition, (b) a typical study including the experimental method and result, and (c) other relevant topics. Figures may be used.

(1) Receptive fields in the visual system

(2) Ventral and dorsal streams

(3) Executive functions

(4) Fear conditioning

設問 1　確率変数 X は下の確率密度関数 $f(x)$ をもつ確率分布に従うとする。

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

X の平均と分散を求めよ。

設問 2　独立な確率変数 X と Y が、それぞれパラメータ λ_1, λ_2 のポアソン分布に従うとする。このとき、$Z = X + Y$ がパラメータ $(\lambda_1 + \lambda_2)$ のポアソン分布に従うことを示せ。パラメータ λ のポアソン分布は下の確率質量関数で与えられる。

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

設問 3　モデル $y_i = \beta x_i + \epsilon_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ \epsilon_i$は誤差項$)$ から生成されるデータ (x_1, y_1), $(x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ に、切片がゼロの回帰直線 $y = \hat{\beta}x$ を最小二乗法でフィッティングする。
(1) $\hat{\beta}$ を求めよ。
(2) $\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{\beta}x_i$ とおくと、$\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{\epsilon}_i = 0$ が成り立つことを示せ。

設問 4　ある研究分野における全統計的仮説の中で、真の仮説（帰無仮説が誤り）と偽の仮説（帰無仮説が正しい）の数の比が $R:1$ であることがわかっているとする。
(1) ある仮説について実験を実施し、有意水準 α、検出力 $1-\beta$ で検定を行う。検定結果が有意であった場合にこの仮説が真である確率を、R, α, β を用いて表せ。また、$R = 0.1$, $\alpha = 0.05, \beta = 0.2$ のときの値を計算せよ。
(2) ある仮説について k 回の独立な実験を実施し、それぞれについて (1) と同様の検定を行う。k 回全ての実験について検定結果が有意であった場合にこの仮説が真である確率を、R, α, β, k を用いて表せ。また、$R = 0.1, \alpha = 0.05, \beta = 0.2, k = 2$ のときの値を計算せよ。

Q.1 Let X be a random variable with the following probability density function:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

Calculate the mean and the variance of X.

Q.2 Let X and Y be independent random variables from the Poisson distributions with parameters λ_1 and λ_2, respectively. Show that $Z = X + Y$ follows the Poisson distribution with the parameter $(\lambda_1 + \lambda_2)$. The Poisson distribution with a parameter λ is given by the following probability mass function:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ .$$

Q.3 Suppose that data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ are generated from a model $y_i = \beta x_i + \epsilon_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ where ϵ_i is an error term. We consider fitting a regression line with zero intercept $y = \hat{\beta}x$ to the data using the least squares method.

(1) Derive $\hat{\beta}$.

(2) Let $\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{\beta}x_i$. Show that $\sum_{i=1}^{n} x_i\hat{\epsilon}_i = 0$.

Q.4 Suppose that among all statistical hypotheses in a research field, the ratio of true hypotheses (where the null hypothesis is wrong) to false hypotheses (where the null hypothesis is correct) is known to be $R : 1$.

(1) A statistical test with significance level α and power $1 - \beta$ is performed on an experiment regarding a hypothesis. Express the probability that this hypothesis is true given that the test result is significant, using R, α, and β. In addition, calculate the value with $R = 0.1$, $\alpha = 0.05$, and $\beta = 0.2$.

(2) The same test as in (1) is performed on each of k independent experiments regarding a hypothesis. Express the probability that this hypothesis is true given that all of the k test results are significant, using R, α, β, and k. In addition, calculate the value with $R = 0.1$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.2$, and $k = 2$.

設問1　入力が d 次元、識別クラスが c 個、各層に n 個のノードを持つ中間層が m 個ある全結合のフィードフォワードニューラルネットワークを考える。出力層を含むすべての層のノードで活性化関数にシグモイド関数を用いるものとする。また、ノード i とノード j の間の重みを w_{ij} と表記し、バイアス項は考えないものとする。

(1) このネットワークを図示せよ。d,c,m,n を記入すること。また、ネットワークの重みの総数を求めよ。

(2) 出力層のノード（インデクスを k とする）の出力 g_k の計算式を、その 1 つ前の層のノード（インデクスを j とする）の出力 g_j を用いて示せ。

(3) バイオリン、フルート、ピアノ、歌声のいずれか、または複数の音源が含まれる音楽信号を入力として、各音源が含まれているかを同定する問題を考える。このとき、出力層のノード k の教師信号 t_k はどのように与えるか述べよ。また、この問題において、出力層のノードにソフトマックス関数を用いるのが適切でない理由を述べよ。

(4) 出力層のノード k の出力 g_k と教師信号 t_k のバイナリクロスエントロピーの式を示せ。

(5) 上記のバイナリクロスエントロピーの全クラスの総和を目的関数とする勾配降下法で、出力層のノード k とその 1 つ前の層のノード j の間の重み w_{jk} を更新する式を示せ。その導出過程を示すこと。

(6) 誤差逆伝播法に基づいて、いずれも出力層でないノード j とノード i の間の重み w_{ij} を更新する式を示せ。導出過程を示す必要はない。

(7) ネットワークの層の数が多くなると上記の重みの更新が効果的に行えなくなる理由を述べよ。また、その対応策についても述べよ。

設問2　d 次元の数値ベクトル $\boldsymbol{X} = (x_1,\ldots,x_d)^{\mathrm{T}}$ の学習サンプルが n 個与えられている。これらの平均ベクトルを $\boldsymbol{M} = (m_1,\ldots,m_d)^{\mathrm{T}}$、共分散行列を Σ とする。ただし、T は転置を表す。

(1) 共分散行列 Σ の各要素 σ_{ij} を求める式を示せ。

(2) ある $\boldsymbol{X}$ とこの学習サンプル集合の分布とのマハラノビス距離の式を示せ。

(3) ニューラルネットワークの学習では、入力の各次元の分布が平均 0、分散 1 になるように正規化する処理を行うことがある。元の入力 $\boldsymbol{X}$ にこの正規化を行ったものを $\boldsymbol{Z}$ とし、その各次元の二乗和の平方根（$\boldsymbol{Z}$ のユークリッドノルム $\|\boldsymbol{Z}\|_2$）と、上記のマハラノビス距離との関係について論じよ。

Q.1 Let us consider a fully-connected feed-forward neural network that has an input of d dimensions, an output of c classes, and m intermediate layers, each having n nodes. A sigmoid function is used in all nodes including output nodes. A weight between node i and node j is denoted as w_{ij}, and there are no bias terms.

(1) Draw this network and specify d, c, m, and n. Answer the total number of the network weights.

(2) Show the output g_k of an output node (indexed with k) using the output g_j of the nodes of the preceding layer (indexed with j).

(3) Consider the problem of detecting the source(s) from music recording composed of the sounds of one or more from violin, flute, piano, and singing voices. Describe how the training label t_k will be given for the output nodes (indexed with k). Explain why it is not appropriate to use a softmax function in the output nodes for this problem.

(4) Show the binary cross-entropy of the output g_k and the training label t_k of an output node (indexed with k).

(5) Show the formula to update the weight w_{jk} of an output node (indexed with k) and a node of the preceding layer (indexed with j) based on the gradient descent method with the objective function of the sum of the binary cross-entropy defined above over all classes. Show how you derive the formula.

(6) Show the formula to update the weight w_{ij} of the nodes (indexed with j and i), both of which are not in the output layer, based on the error back-propagation method. You do not have to show how you derive it.

(7) Explain why it is difficult to update the weights effectively as the number of network layers becomes large. Describe the methods to mitigate this problem.

Q.2 Let us consider n training samples of a d-dimensional vector $X = (x_1,\ldots,x_d)^T$, with their mean vector and covariance matrix denoted as $M = (m_1,\ldots,m_d)^T$ and Σ, respectively, where T denotes the transpose.

(1) Show the formula to compute the component σ_{ij} of the covariance matrix Σ.

(2) Show the formula of the Mahalanobis distance between a sample X and this training sample distribution.

(3) In neural network training, we often conduct normalization of inputs so that the distribution for each dimension has a mean of 0 and a variance of 1. Let X and Z be an original input and its normalized one. Discuss the relationship between the square root of the sum of the squared values in each dimension of Z, which is regarded as the Euclidean norm $\|Z\|_2$, and the above Mahalanobis distance.

設問　情報源アルファベットが $\Sigma = \{0, 1\}$ であり、内部状態の数が有限個であり、既約かつ非周期的なマルコフ情報源 S_1 と S_2 に対して、以下の条件を与える。

[C1]　S_1 と S_2 は 11 が現れるような系列を出力しない。

[C2]　S_2 は 0000 が現れるような系列を出力しない。

以下の小問 (1) から (5) のすべてに解答せよ。

(1)　S_1 の内部状態を $s_1, s_2, \ldots, s_m$ とし、S_1 が状態 s_1 にあるときに記号 0 を出力する確率を $p\ (0 < p < 1)$ として、S_1 の状態遷移図を描け。状態数 m を最小にすること。

(2)　S_2 の内部状態を $t_1, t_2, \ldots, t_n$ とし、S_2 が状態 t_1 にあるときに記号 0 を出力する確率を $p\ (0 < p < 1)$、状態 t_2 にあるときに記号 0 を出力する確率を $q\ (0 < q < 1)$ として、S_2 の状態遷移図を描け。状態数 n を最小にすること。なぜ [C1] と [C2] の両方を満たすのか、理由も付すこと。

(3)　S_2 の遷移確率行列を与えよ。

(4)　$p = q$ とするとき、状態の組 $(t_1, \ldots, t_n)$ 上の確率分布 $(q_1, \ldots, q_n)$ $(0 \le q_i \le 1,$ $q_1 + \cdots + q_n = 1)$ が定常分布になるように、$q_1, \ldots, q_n$ をそれぞれ p で表せ。

(5)　初期分布が (4) で与えた定常分布のとき、情報源 S_2 のエントロピーを p で表せ。

Q. Let $\Sigma = \{0, 1\}$ be an alphabet for information sources. Assume that **irreducible and aperiodic** Markov information sources S_1 and S_2 consisting of finite numbers of states satisfy

[C1] neither S_1 nor S_2 outputs any sequence including 11, and

[C2] S_2 does not output any sequence including 0000.

Answer all of the following subquestions from (1) to (5).

(1) Let $s_1, s_2, \ldots, s_m$ be the states of S_1. Draw the transition diagram of S_1. Assume that S_1 should output 0 with probability p $(0 < p < 1)$ when it is at state s_1. You must make the number of the states m minimum.

(2) Let $t_1, t_2, \ldots, t_n$ be the states of S_2. Draw the transition diagram of S_2. Assume that S_2 should output 0 with probability p $(0 < p < 1)$ when it is at state t_1 and with probability q $(0 < q < 1)$ when it is at state t_2. You must make the number of the states n minimum. Also explain the reason why your answer satisfies [C1] and [C2].

(3) Give the transition matrix of S_2.

(4) Let a probability distribution $(q_1, \ldots, q_n)$ $(0 \leq q_i \leq 1, q_1 + \cdots + q_n = 1)$ be on the states $(t_1, \ldots, t_n)$. When the distribution is stationary and $p = q$, represent each of $q_1, \ldots, q_n$ with p.

(5) Show the entropy of S_2 with p when the initial distribution is equal to the stationary distribution given in (4).

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f(x)]$、および、デルタ関数 $\delta(x)$ のフーリエ積分表示が以下の式によってそれぞれ与えられるとき、以下の設問に答えよ。ただし、x、k は実数、$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ とする。

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{i}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{ii}$$

設問 1　以下の関数のフーリエ変換を求めよ。ただし、ω は実数とする。

(1) $f_1(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1 & (0 \le x \le 2) \\ 0 & (x>2) \end{cases}$

(2) $f_2(x) = \cos^2 \omega x$

設問 2　以下の手順に従って関数 $f_3(x)$ のフーリエ変換を求めよ。

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x<-2) \\ x+2 & (-2 \le x < 0) \\ 2-x & (0 \le x < 2) \\ 0 & (x \ge 2) \end{cases}$$

(1) 畳み込みに関する以下の式を導出せよ。

$$\mathcal{F}[f(x)*g(x)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)]$$

(2) 上記の $f_1(x)$ との畳み込みが $f_3(x) = f_1(x) * f_4(x)$ を満たす関数 $f_4(x)$ を求め、実際に $f_3(x)$ が得られることを説明せよ。

(3) $\mathcal{F}[f_3(x)]$ を求めよ。

Suppose that the Fourier transform $\mathcal{F}[f(x)]$ of a function $f(x)$ and the Fourier integral representation of the Dirac delta function $\delta(x)$ are given by the following formulae, where x and k are real numbers, and $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Answer the following questions.

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \qquad \text{(i)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \qquad \text{(ii)}$$

Q.1 Compute the Fourier transform of the functions given below, where ω is a real number.

(1) $f_1(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq 2) \\ 0 & (x > 2) \end{cases}$

(2) $f_2(x) = \cos^2 \omega x$

Q.2 Compute the Fourier transform of function $f_3(x)$ by following the steps below.

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2) \\ x + 2 & (-2 \leq x < 0) \\ 2 - x & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (x \geq 2) \end{cases}$$

(1) Derive the following equation concerning convolution operation.

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x - \tau) \mathrm{d}\tau\right] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f(x)] \mathcal{F}[g(x)]$$

(2) Find function $f_4(x)$ whose convolution with the above $f_1(x)$ satisfies $f_3(x) = f_1(x) * f_4(x)$, and explain how the convolution gives $f_3(x)$.

(3) Compute $\mathcal{F}[f_3(x)]$.

設問　x をブール変数、$\neg x$ を x の否定とする。以下の設問に答えよ。

(1)　以下の充足可能性問題の例に解が存在するかどうかを答えよ。解が存在する場合はすべて答えよ。

(i)　$(x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_5) = 1$

(ii)　$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) = 1$

(2)　$\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{2} v_{i,j}) = 1$ に解が存在するか判定する問題を 2SAT 問題、$\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{3} v_{i,j}) = 1$ に解が存在するか判定する問題を 3SAT 問題と呼ぶ。$v_{i,j}$ はリテラル（ブール変数か、その否定）である。2SAT 問題と 3SAT 問題の複雑さの違いを計算時間の観点から説明せよ。なお m は十分に大きな整数とする。

(3)　与えられたグラフに対し、互いに隣接しない k 個の頂点が存在するか判定する問題を k-独立頂点集合問題と呼ぶ。k-独立頂点集合問題の複雑さを計算時間の観点から解析するために、3SAT 問題を k-独立頂点集合問題に変換することを考える。設問 (1)(ii) の 3SAT 問題の任意の解が 3-独立ではない頂点集合には変換されず、かつ任意の 3-独立頂点集合が矛盾なく充足可能なリテラル集合に対応するよう、図 1 に 6 本の枝を追加してグラフを描画せよ。また変換方法と枝を追加するための基準を説明せよ。

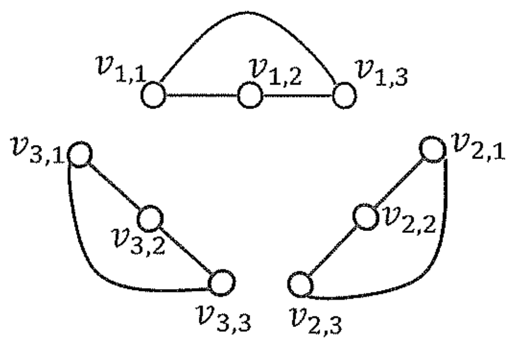

図 1

(4)　k を十分に大きな整数とする。k-独立頂点集合問題の複雑さを、3SAT 問題の複雑さと関連づけて、計算時間の観点より論ぜよ。

(5)　単純グラフ $G = (V, E)$ に対し、$E' = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$ とすると、$G' = (V, E')$ を G の補グラフと呼ぶ。G における k-独立頂点集合 $V' \subseteq V$ は、補グラフ G' においてどのような性質を持つか説明せよ。

Q. Let x and $\neg x$ be a Boolean variable and its negation, respectively. Answer the following questions.

(1) Answer whether each following instance of the satisfiability problem has a solution or not. If it has, answer all the solutions.

(i) $(x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_5) = 1$

(ii) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) = 1$

(2) The problem of determining whether $\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{2} v_{i,j}) = 1$ has a solution is called the 2SAT problem where $v_{i,j}$ is a literal (a Boolean variable or its negation). The problem of determining whether $\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{3} v_{i,j}) = 1$ has a solution is called the 3SAT problem. Suppose that m is a sufficiently large integer. Explain the difference in complexity between the 2SAT and 3SAT problems in terms of computation time.

(3) The problem of determining whether there exist k vertices that are not adjacent to each other for a given graph is called the k-independent vertex set problem. To analyze the complexity of the k-independent vertex set problem in terms of computation time, let us consider transforming a 3SAT problem into a k-independent vertex set problem. Draw a graph by adding six edges to Fig. 1 so that any solutions to the 3SAT problem in Q.(1)(ii) are not transformed into vertex sets that are not 3-independent, and any 3-independent vertex sets correspond to satisfiable literal sets without contradiction. Also, explain the transformation method and the criteria for adding edges.

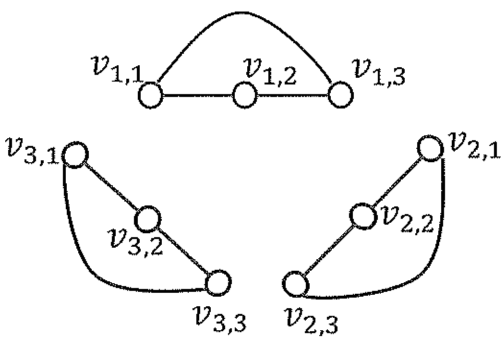

Fig. 1

(4) Let k be a sufficiently large integer. Discuss the complexity of the k-independent vertex set problem in relation to the complexity of the 3SAT problem in terms of computation time.

(5) $G' = (V, E')$ is called a complement graph of a simple graph $G = (V, E)$ where $E' = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$. Explain what property the k-independent vertex set $V' \subseteq V$ in G has in G'.