基礎数学 I

$\boxed{1}$

以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ理由とともに反例をあげよ．

(i) 数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

(ii) 数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(iii) $\mathbb{R}$ 上の広義単調増加な C^1 級関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{df}{dx}(x) = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ は収束する．

(iv) $\mathbb{R}$ 上の広義単調増加な C^1 級関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{df}{dx}(x) = 0$ である．

An English Translation:

Basic Mathematics I

$\boxed{1}$

For each of the following statements, if the statement is correct, prove it. If the statement is not correct, give a counterexample with a reason.

(i) For a sequence $\{a_n\}$, if $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) For a sequence $\{a_n\}$, if $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, then $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

(iii) For a monotonically non-decreasing C^1 class function $f(x)$ on $\mathbb{R}$, if $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{df}{dx}(x) = 0$, then $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ converges.

(iv) For a monotonically non-decreasing C^1 class function $f(x)$ on $\mathbb{R}$, if $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ converges, then $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{df}{dx}(x) = 0$.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

X を相異なる整数からなる有限集合とする．X の要素の最小値，最大値をそれぞれ $\min(X)$，$\max(X)$ と記す．また X の要素の個数を $|X|$ と記す．二つの要素 $x, y \in X$ について，$x < y$ が成り立ち，かつ $x < z < y$ である要素 $z \in X$ が存在しないとき，(x, y) を X の隣接対と言う．X の隣接対すべての集合を $\mathrm{P}(X)$ と記す．隣接対 $p = (x, y) \in \mathrm{P}(X)$ について $\mathrm{gap}(p) \triangleq y - x$ と定める．$|X| \geqq 2$ のとき，X における $\mathrm{gap}(p)$, $p \in \mathrm{P}(X)$ の平均値を $\overline{\mathrm{gap}}(X) \triangleq \dfrac{1}{|\mathrm{P}(X)|} \sum_{p \in \mathrm{P}(X)} \mathrm{gap}(p)$ と定める．

二個以上の相異なる整数からなる有限集合 A が与えられたとする．$n = |A|$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) $\overline{\mathrm{gap}}(A) = \dfrac{\max(A) - \min(A)}{|A| - 1}$ を証明せよ．

(ii) 隣接対 $p \in \mathrm{P}(A)$ のうち $\mathrm{gap}(p)$ が最大となるものすべてを求める，$O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

(iii) $A_1 = \left\{x \in A \mid x \leqq \dfrac{\max(A) + \min(A)}{2}\right\}$，$A_2 = \left\{x \in A \mid x > \dfrac{\max(A) + \min(A)}{2}\right\}$ とする．また $a = \max(A_1)$, $b = \min(A_2)$ とする．このとき，$|A|$ が奇数であり，かつ $b - a < \overline{\mathrm{gap}}(A)$ ならば，$|A_i| = \min(\{|A_1|, |A_2|\})$ を満たす $i \in \{1, 2\}$ に対して以下の (a), (b), (c) がそれぞれ成り立つことを証明せよ．

   (a) $2 \leqq |A_i| \leqq \dfrac{|A| - 1}{2}$.

   (b) $\max(A_i) - \min(A_i) \geqq \dfrac{\max(A) - \min(A)}{2} - (b - a)$.

   (c) $\overline{\mathrm{gap}}(A_i) > \overline{\mathrm{gap}}(A)$.

(iv) $\mathrm{gap}(p) \geqq \overline{\mathrm{gap}}(A)$ を満たす隣接対 $p \in \mathrm{P}(A)$ を，二分探索によってひとつ求める $O(n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

2

Let X be a finite set of distinct integers. Denote the minimum element in X by $\min(X)$ and the maximum element in X by $\max(X)$. Also denote the number of elements in X by $|X|$. For two elements $x, y \in X$, we call a pair (x, y) an adjacent pair of X if $x < y$ and there is no element $z \in X$ such that $x < z < y$. Denote by $\mathrm{P}(X)$ the set of all adjacent pairs of X. For each adjacent pair $p = (x, y) \in \mathrm{P}(X)$, we define $\mathrm{gap}(p) \triangleq y - x$. When $|X| \geqq 2$, we define the average of $\mathrm{gap}(p)$, $p \in \mathrm{P}(X)$ to be $\overline{\mathrm{gap}}(X) \triangleq \dfrac{1}{|\mathrm{P}(X)|} \displaystyle\sum_{p \in \mathrm{P}(X)} \mathrm{gap}(p)$.

Assume that we are given a finite set A that consists of two or more distinct integers. We denote $n = |A|$. Answer the following questions.

(i) Prove that $\overline{\mathrm{gap}}(A) = \dfrac{\max(A) - \min(A)}{|A| - 1}$.

(ii) Give an $O(n \log n)$-time algorithm that computes all adjacent pairs $p \in \mathrm{P}(A)$ such that $\mathrm{gap}(p)$ is maximized.

(iii) Let $A_1 = \left\{x \in A \mid x \leqq \dfrac{\max(A) + \min(A)}{2}\right\}$ and $A_2 = \left\{x \in A \mid x > \dfrac{\max(A) + \min(A)}{2}\right\}$. Also let $a = \max(A_1)$ and $b = \min(A_2)$. When $|A|$ is odd and $b - a < \overline{\mathrm{gap}}(A)$, prove that (a), (b) and (c) hold for the index $i \in \{1, 2\}$ such that $|A_i| = \min(\{|A_1|, |A_2|\})$.

  (a) $2 \leqq |A_i| \leqq \dfrac{|A| - 1}{2}$.

  (b) $\max(A_i) - \min(A_i) \geqq \dfrac{\max(A) - \min(A)}{2} - (b - a)$.

  (c) $\overline{\mathrm{gap}}(A_i) > \overline{\mathrm{gap}}(A)$.

(iv) Give an $O(n)$-time algorithm that finds one adjacent pair $p \in \mathrm{P}(A)$ such that $\mathrm{gap}(p) \geqq \overline{\mathrm{gap}}(A)$ by using a binary search.

線形計画

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ とする．次の線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，問題 P の決定変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，$^\top$ は転置記号を表す．また，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ と $y_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 P の双対問題を D とする．$\boldsymbol{r}^* \in \mathbb{R}^m$ が問題 D の最適解であり，ある実数 $\varepsilon > 0$ に対して，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r} < \varepsilon$ を満たす問題 D の実行可能解 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^m$ が存在すると仮定する．そのとき，

$$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r}^* - \varepsilon < \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r} \leqq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r}^*$$

が成立することを示せ．

(ii) $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は第 (i, i) 成分を y_i とする対角行列と定義し，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{A}^\top$ は正則行列と仮定する．さらに，以下の最適化問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{Q:} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \\ & & \|\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{d}\| \leqq \dfrac{1}{2} \end{array}$$

ここで，問題 Q の決定変数は $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ であり，$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す (すなわち，任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して，$\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}}$)．また，$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{A}^\top)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{c}$ と定義し，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する．さらに，以下のベクトルを定義する．

$$\boldsymbol{d}^* = -\frac{\boldsymbol{Y}^2(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})}{2\,\|\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})\|}$$

以下の問 (a)，(b)，(c) に答えよ．

(a) $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}^* = -\dfrac{\|\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})\|}{2}$ であることを示せ．

(b) $\boldsymbol{d}^*$ が問題 Q の最適解であることを示せ．

(c) $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^*$ とする．そのとき，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ が問題 P の実行可能解であることと，$\boldsymbol{c}^\top \tilde{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}$ を満たすことを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Consider the following linear programming problem:

$$\begin{array}{lll} \text{P:} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ is the decision variable, and $^\top$ denotes transposition. Also, assume that there exists a vector $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ satisfying $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ and $y_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Answer the following questions.

(i) Let D be a dual problem of P. Assume that $\boldsymbol{r}^* \in \mathbb{R}^m$ is an optimal solution of problem D, and that there exists a feasible solution $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^m$ of D such that $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r} < \varepsilon$ for some real number $\varepsilon > 0$. Show that

$$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r}^* - \varepsilon < \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r} \leqq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{r}^*.$$

(ii) Define $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as the diagonal matrix whose (i,i)th entry is equal to y_i, and assume that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{A}^\top$ is nonsingular. Consider also the optimization problem below:

$$\begin{array}{lll} \text{Q:} & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \\ & & \|\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{d}\| \leqq \dfrac{1}{2}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ is the decision variable, and $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm (that is, $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}}$ for any vector $\boldsymbol{z}$). Define $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{A}^\top)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{c}$, and assume that $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$. Moreover, define the vector below:

$$\boldsymbol{d}^* = -\frac{\boldsymbol{Y}^2(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})}{2\,\|\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})\|}.$$

Answer the following questions (a), (b) and (c).

(a) Show that $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d}^* = -\dfrac{\|\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})\|}{2}$.

(b) Prove that $\boldsymbol{d}^*$ is an optimal solution of problem Q.

(c) Let $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^*$. Prove that $\tilde{\boldsymbol{x}}$ is feasible to problem P, and that $\boldsymbol{c}^\top \tilde{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}$.

線形制御理論

$\boxed{4}$

図 1 は質量ばね系である．物体は質量 $m > 0$ であるとし，ばねのつり合いの位置からの物体の変位を y とする．物体と床の間には摩擦はない．さらに物体には外部から力 u を加えることができる．ばねは質量をもたず，フックの法則にしたがうとし，ばね定数を $k > 0$ とする．ただし物体の運動は一次元上で行われる．以下の問いに答えよ．

(i) 外部の力 u を入力，変位 y を出力とするとき，入力から出力までの伝達関数を求めよ．

(ii) 入力 u を変位 y を用いて $u = -cy$ とフィードバックとして与えるとき，このフィードバック系はどのような比例定数 c に対しても安定でないことを示せ．

(iii) 入力 u を速度 $\dot{y}$ を用いて $u = -d\dot{y}$ とフィードバックとして与えるとき，このフィードバック系を安定化する比例定数 d の値の範囲を求めよ．

(iv) 入力 u を速度 $\dot{y}$ ならびに力 v を用いて $u = -d\dot{y} + v$ と与える．ここで d は比例定数である．v から y へのフィードバック系の伝達関数を $H(s)$ とする．フィードバック系が安定であり，かつすべての角周波数 ω において $|H(j\omega)/H(0)| \leqq M$ を満たす比例定数 d の値の範囲を求めよ．ただし $M \geqq 1$ は定数である．

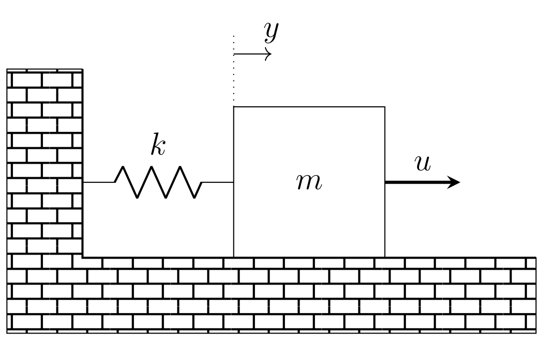

図 1：質量ばね系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

Figure 1 shows a mass-spring system. The body has the mass $m > 0$, and the displacement of the body from the equilibrium position of the spring is denoted as y. We assume no friction between the floor and the body. Furthermore, we assume that the force u can be applied to the body from the outside. The spring has no mass and obeys Hooke's law, and $k > 0$ is the spring constant. Here, the motion of the body is confined in the one-dimensional direction. Answer the following questions.

(i) Let the external force u be the input, and let the displacement y be the output. Determine the transfer function from the input to the output.

(ii) Show that if the input u is given as feedback $u = -cy$ using the displacement y, then the feedback system is unstable for any proportional constant c.

(iii) Find the range of the proportional constant d for which the feedback system is stable if the input u is given as feedback $u = -d\dot{y}$ using the velocity $\dot{y}$.

(iv) The input u is given as feedback $u = -d\dot{y} + v$ using the velocity $\dot{y}$ and a force v, where d is the proportional constant. Let $H(s)$ be the transfer function from v to y of the feedback system. Find the range of the proportional constant d for which the feedback system is stable and $|H(j\omega)/H(0)| \leqq M$ holds for any angular frequency ω, where $M \geqq 1$ is a constant.

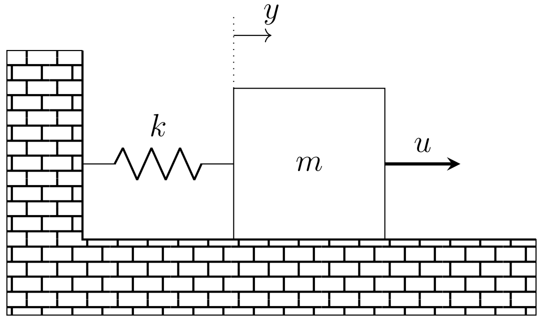

Figure 1 : Mass-spring system

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の質点が平面内で中心力を受けて運動している．ここで (r, θ) を極座標とし，質点の位置は $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で表す．力の中心を座標原点とし，中心力を $mf(r)$ とする．中心力の正の方向はベクトル $\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と同じである．$r > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) $r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ が時刻 t に依らず，一定値であることを示せ．

以下では，$h = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ とおく．さらに $h \neq 0$ とする．

(ii) $u = \dfrac{1}{r}$ とおくと，u を用いた運動方程式は以下となることを示せ．

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{h^2u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

(iii) この質点が，平面内で $k > 0$ と $0 < \epsilon < 1$ を定数として $r = k(1 + \epsilon\cos\theta)$ という軌道を描いている．中心力 $mf(r)$ を h, k, m, r, ϵ を用いて表せ．

An English Translation:

Basic Mechanics

5

Consider the planar motion of a particle with the mass m subject to the central force. Let (r, θ) be the polar coordinates and $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ be the position of the particle. Let $mf(r)$ be the central force, where the center of force is the origin in the coordinate system. The positive direction of the central force is the same as the vector $\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Assume that $r > 0$. Answer the following questions.

(i) Show that $r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ is a constant of motion.

Let $h = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ and assume $h \neq 0$.

(ii) Let $u = \dfrac{1}{r}$. Show that the equation of motion using u is as follows:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{h^2u^2} f\left(\frac{1}{u}\right).$$

(iii) Express the central force $mf(r)$ in terms of h, k, m, r, and ϵ when the particle has the orbit $r = k(1 + \epsilon\cos\theta)$ in the plane, where $k > 0$ and $0 < \epsilon < 1$ are constants.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

X を変数 x と y の同次 2 次多項式 (x^2, xy, y^2 の線形和) を成分とする 2 次元ベクトルからなる線形空間とし，線形写像 $L : X \to X$ を次式により定める．

$$L\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$f(x,y)$ と $g(x,y)$ は任意の x と y の同次 2 次多項式，添字 x と y は，それぞれ，変数 x と y に関する偏微分を表す．さらに，

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} x^i y^j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^i y^j \end{pmatrix} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(i) u_{ij}, v_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ から選んで線形空間 X の基底を構成せよ．また，X の次元はいくつか．

(ii) (i) で構成した基底の各々の元に対する線形写像 L の像を求めよ．

(iii) (i) で構成した基底に対する線形写像 L の表現行列を求めよ．

(iv) 線形写像 L の核空間 $\mathrm{Ker}L$ を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

6

Let X be a linear space consisting of two-dimensional vectors whose elements are homogeneous second-order polynomials of the variables x and y (linear combinations of x^2, xy and y^2). Define a linear map $L : X \to X$ as

$$L \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

where $f(x,y)$ and $g(x,y)$ are any homogeneous second-order polynomials of x and y, and the subscripts x and y represent partial differentiation with respect to x and y, respectively. Let

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} x^i y^j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^i y^j \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Answer the following questions.

(i) Choose from $u_{ij}, v_{ij},\ i, j = 0, 1, 2, \ldots$, and construct a basis of the linear space X. In addition, what is the dimension of X?

(ii) Obtain the images of the linear map L for each element of the basis constructed in (i).

(iii) Obtain the representation matrix of the linear map L for the basis constructed in (i).

(iv) Obtain the kernel space $\mathrm{Ker}L$ of the linear map L.

応用数学

$\boxed{1}$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (\,-\pi < x < 0\,) \\ 1 & (\,0 < x < \pi\,) \\ 0 & (\,x = 0,\,\pi) \end{cases}$$

によって定める．このとき，$f(x)$ のフーリエ級数の第 n 項までの部分和を

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

で表す．以下の問いに答えよ．

(i) $f(x)$ のフーリエ係数 $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ を求めよ．

(ii) 次式の成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

(iii) 数列 $\{g_n\}$ を

$$g_n = \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{\sin s}{s} ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

によって定める．$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，$g_n > g_{n+1}$ の成り立つことを示せ．

(iv) 次式の成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1$$

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

The periodic function $f(x)$ with period 2π is defined by

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0); \\ 1 & (0 < x < \pi); \\ 0 & (x = 0,\ \pi). \end{cases}$$

We denote the finite sum of the Fourier series of $f(x)$ up to the nth term by

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

Answer the following questions.

(i) Obtain the Fourier coefficients $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ for $f(x)$.

(ii) Show that

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(iii) The sequence $\{g_n\}$ is defined by

$$g_n = \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{\sin s}{s} ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Show that $g_n > g_{n+1}$ holds for $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(iv) Show that

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1.$$

グラフ理論

$\boxed{2}$

非負実数全体の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．$N = [G, c]$ を点集合 V，枝集合 E をもつ単純有向グラフ $G = (V, E)$ および容量関数 $c : E \to \mathbb{R}_+$ からなるネットワークとする．点の部分集合 $X, Y \subseteqq V$ に対し，X 内の点から Y 内の点へ向かう枝の集合を $E(X, Y)$ と記す．指定された二点 $s, t \in V$ に対し，次を満たす関数 $f : E \to \mathbb{R}_+$ を (s,t)-フローと呼ぶ．

流量保存則: $\displaystyle\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{v\}, \{v\})} f(e) = 0, \ ^\forall v \in V \setminus \{s, t\}$,

容量制約: $f(e) \leqq c(e), \ ^\forall e \in E$.

(s,t)-フロー f の流量 $\mathrm{val}(f)$ を

$$\mathrm{val}(f) := \sum_{e \in E(\{s\}, V \setminus \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{s\}, \{s\})} f(e)$$

で定める．また $s \in X$, $t \in V \setminus X$ を満たす点の部分集合 $X \subseteqq V$ を (s,t)-カットと呼び，その容量 $\mathrm{cap}(X)$ を

$$\mathrm{cap}(X) := \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} c(e)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の (s,t)-フロー f と (s,t)-カット X に対し以下が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus X, X)} f(e) \leqq \mathrm{cap}(X).$$

(ii) 与えられた (s,t)-フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$ の作り方を説明せよ．

(iii) 残余ネットワーク N_f が s から t へ至る有向路を持たないような (s,t)-フロー f に対し，S を N_f において s から到達可能な点の集合とする．このとき N において $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ が成り立つことを証明せよ．

(iv) X を N において容量 $\mathrm{cap}(X)$ を最小にする任意の (s,t)-カットとする．このとき (iii) の残余ネットワーク N_f において s から $V \setminus X$ のどの点へも到達できないことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $\mathbb{R}_+$ denote the set of nonnegative reals. Let $N = [G, c]$ be a network that consists of a simple directed graph $G = (V, E)$ with a vertex set V and an edge set E and a capacity function $c : E \to \mathbb{R}_+$. For vertex subsets $X, Y \subseteqq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges that leave a vertex in X and enter a vertex in Y. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s, t)-flow is defined to be a function $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies the following:

Flow conservation law: $\displaystyle\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{v\}, \{v\})} f(e) = 0,\ {}^\forall v \in V \setminus \{s, t\},$

Capacity constraint: $f(e) \leqq c(e),\ {}^\forall e \in E.$

The flow value $\mathrm{val}(f)$ of an (s, t)-flow f is defined to be

$$\mathrm{val}(f) := \sum_{e \in E(\{s\}, V \setminus \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{s\}, \{s\})} f(e).$$

An (s, t)-cut is defined to be a vertex subset $X \subseteqq V$ such that $s \in X$ and $t \in V \setminus X$, and its capacity $\mathrm{cap}(X)$ is defined to be

$$\mathrm{cap}(X) := \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} c(e).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that for any (s, t)-flow f and any (s, t)-cut X

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus X, X)} f(e) \leqq \mathrm{cap}(X)$$

holds.

(ii) For a given (s, t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$.

(iii) For an (s, t)-flow f such that the residual network N_f has no directed path from s to t, let S denote the set of all vertices reachable from s in N_f. Prove that $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ holds in N.

(iv) Let X be an (s, t)-cut with the minimum capacity $\mathrm{cap}(X)$ in N. Prove that no vertex in $V \setminus X$ is reachable from s in the residual network N_f in (iii).

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

$\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする．$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{u}$ は次の条件 (a)-(c) を満たすとする．ただし，$\boldsymbol{I}$ は $n \times n$ の単位行列であり，$^\top$ は転置を表す．

(a) $\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{I}$ は半正定値対称行列である

(b) $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$

(c) $\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u} = 1$

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x} \\ g(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

次の最適化問題 (P1) と (P2) を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P1)} & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P2)} & \text{minimize} & g(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1 \end{array}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$g(\boldsymbol{x}) \geqq g(\boldsymbol{y}) + \nabla g(\boldsymbol{y})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

(ii) 問題 (P2) の大域的最適解を一つ求めよ．さらに，それが実際に (P2) の大域的最適解であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{u}$ が問題 (P1) の大域的最適解であることを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. Suppose that $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{q}$, and $\boldsymbol{u}$ satisfy the following conditions (a)-(c). Here $\boldsymbol{I}$ denotes the $n \times n$ identity matrix and $^\top$ denotes transposition.

(a) $\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{I}$ is symmetric positive semidefinite;

(b) $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$;

(c) $\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u} = 1$.

Let functions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x}, \\ g(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

respectively.

Consider the following optimization problems (P1) and (P2):

$$\begin{array}{lll} \text{(P1)} & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(P2)} & \text{minimize} & g(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} \leqq 1. \end{array}$$

Answer the following questions.

(i) Show that the following inequality holds for any $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$g(\boldsymbol{x}) \geqq g(\boldsymbol{y}) + \nabla g(\boldsymbol{y})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

(ii) Obtain a global optimal solution to problem (P2). Moreover, prove that it is in fact globally optimal to (P2).

(iii) Show that $\boldsymbol{u}$ is a global optimal solution to problem (P1).

現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$，$C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力とする．以下の問いに答えよ．

(i) システムの可観測性の定義を述べよ．

(ii) システムが可観測ならば $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ は正則であることを証明せよ．

以下では $n = 3$ として，行列 $A,\ B,\ C$ が

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -0.5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられるとする．

(iii) このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ．

(iv) $A + BK$ の固有値が $-0.5, -1, -2$ となる行列 $K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ を一つ求めよ．

(v) 評価関数

$$\int_0^\infty y(t)^2 + u(t)^2 dt$$

を最小化する入力 $u(t)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an output. Answer the following questions.

(i) Describe the definition of observability of the system.

(ii) Prove that $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ is nonsingular if the system is observable.

In what follows, let $n = 3$ and matrices $A,\ B$, and C be given by

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -0.5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Determine the controllability and observability of this system.

(iv) Find a matrix $K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ for which the eigenvalues of $A + BK$ are $-0.5,\ -1$, and -2.

(v) Find an input $u(t)$ that minimizes the cost function

$$\int_0^\infty y(t)^2 + u(t)^2 dt.$$

物理統計学

$\boxed{5}$

時系列 $X_0, X_1, \ldots \in (-1,1)$ は,　エルゴード性を持つ力学系 $X_{n+1} = 8X_n^4 - 8X_n^2 + 1$ により決定されるものとする．その力学系は, 区間 $(-1,1)$ 上の確率測度 $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ を不変測度として持ち, 混合的であるとする．さらに

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満足する任意の関数 $B(x)$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} B(X_n) = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx) \quad \text{a.e.}$$

が成立する．

$$\langle B(X_n) \rangle = \langle B \rangle = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx)$$

と定義し, X_0 は不変測度 $\mu(dx)$ に従って分布しているものとする．以下の問いに答えよ．

(i) $X_n = \cos\theta$ としたとき, $X_{n+1} = \cos 4\theta$ であることを示せ．

(ii) $B(x) = x$ のとき, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(iii) $B(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ のとき, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(iv) $B(x) = x(8x^4 - 8x^2 + 1)$ のとき, $\langle B \rangle = 0$ であることを示せ．

(v) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(8x^4 - 8x^2 + 1)$ のとき, $\langle B \rangle = a_0$ 及び $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ であることを示せ．

(vi) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(8x^4 - 8x^2 + 1)$ に対して,

$$R(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \{B(X_n) - \langle B \rangle\}, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

と定義する．極限 $D = \lim_{N\to\infty} \dfrac{\langle R(N)^2 \rangle}{2N}$ を求めよ．

An English Translation:

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let a time series $X_0, X_1, \ldots \in (-1, 1)$ be determined by an ergodic dynamical system $X_{n+1} = 8X_n^4 - 8X_n^2 + 1$, which has a mixing property with respect to an invariant probability measure $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $(-1, 1)$. The relation

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} B(X_n) = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx) \quad \text{a.e.}$$

holds for any function $B(x)$ satisfying

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty.$$

Define

$$\langle B(X_n) \rangle = \langle B \rangle = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx).$$

Assume that X_0 is distributed according to the invariant probability measure $\mu(dx)$. Answer the following questions.

(i) Show that $X_{n+1} = \cos 4\theta$ for $X_n = \cos\theta$.

(ii) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = x$.

(iii) Show that $\langle B \rangle = 0$ and $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

(iv) Show that $\langle B \rangle = 0$ for $B(x) = x(8x^4 - 8x^2 + 1)$.

(v) Show that $\langle B \rangle = a_0$ and $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(8x^4 - 8x^2 + 1)$.

(vi) Define

$$R(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \{B(X_n) - \langle B \rangle\}, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(8x^4 - 8x^2 + 1)$. Obtain the limit $D = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\langle R(N)^2 \rangle}{2N}$.

力学系数学

$\boxed{6}$

$n \geqq 2$ を自然数とする．a, b を実数とし，A を対角成分が $a+b$，それ以外の成分が b の n 次正方行列とする:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & \dots & b \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a+b \end{pmatrix}.$$

常微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

に対して，初期条件

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす解 $\boldsymbol{x}(t)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(i) $n = 2$ のとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(ii) $n = 3$ のとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(iii) $n = 3$ のとき，$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ となるための必要十分条件を a, b で表せ．

(iv) 任意の自然数 $n \geqq 2$ に対して，$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ となるための必要十分条件を a, b, n で表せ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $n \geqq 2$ be an integer. Let a, b be real numbers, and A be the $n \times n$ matrix whose diagonal components are $a+b$ and whose other components are b:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & \dots & b \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a+b \end{pmatrix}.$$

Consider the solution $\boldsymbol{x}(t)$ of the system of ordinary differential equations

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

satisfying the initial condition

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(i) For $n = 2$, find $\boldsymbol{x}(t)$.

(ii) For $n = 3$, find $\boldsymbol{x}(t)$.

(iii) For $n = 3$, obtain a necessary and sufficient condition for $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$, and express the condition using a and b.

(iv) For any integer $n \geqq 2$, obtain a necessary and sufficient condition for $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$, and express the condition using a, b and n.