2020 年度 10 月期入学 / 2021 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2020 年 8 月 1 日 9:00〜11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 9 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。**すべて解答しなさい。**
   - F1-1, F1-2　　線形代数、微分積分……………………1-4 ページ
   - F2-1, F2-2　　アルゴリズムとデータ構造………………5-8 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;
the English translation below is provided for reference only

October 2020 Admissions / April 2021 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 1, 2020
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 9 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   - F1-1, F1-2　　Linear Algebra, Calculus ……………………Pages 1 to 4
   - F2-1, F2-2　　Algorithms and Data Structures ……………Pages 5 to 8
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の問いに答えよ。

(1) 次式で与えられる正方行列 $\mathbf{D}$ の行列式を求めよ。

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 次式で与えられる正方行列 $\mathbf{X}$ を考える。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

ここで、a および b は実数とする。$\mathbf{X}^3 - 5\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X} - 4\mathbf{E} = \mathbf{O}$ を満たすとき、a および b を求めよ。ここで、$\mathbf{E}$ および $\mathbf{O}$ はそれぞれ単位行列および零行列を表す。

設問 2　ある正方行列 $\mathbf{A}$ が実歪対称行列であるとは、$\mathbf{A}$ のすべての要素が実数であり、かつ $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ を満たす場合を言う。ここで、$^\top$ は行列の転置を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 2×2 および 3×3 の実歪対称行列の一般形を示せ。

(2) 任意の奇数 n に対して、$n \times n$ の実歪対称行列は正則でないことを示せ。

(3) 実歪対称行列のすべての固有値は 0 あるいは純虚数であることを示せ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Compute the determinant of a square matrix $\mathbf{D}$ given by

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Let $\mathbf{X}$ be a square matrix given by

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

where both a and b are real numbers. Derive a and b if $\mathbf{X}^3 - 5\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X} - 4\mathbf{E} = \mathbf{O}$, where $\mathbf{E}$ and $\mathbf{O}$ represent the identity matrix and the zero matrix, respectively.

Q.2 A square matrix $\mathbf{A}$ is called real skew-symmetric if all the elements of $\mathbf{A}$ are real numbers and $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, where $^\top$ denotes the matrix transpose. Answer the following questions.

(1) Show the general expressions of 2×2 and 3×3 real skew-symmetric matrices.

(2) Prove that for any odd number n, any $n \times n$ real skew-symmetric matrix is non-invertible (singular).

(3) Prove that all the eigenvalues of any real skew-symmetric matrix are 0 or purely imaginary numbers.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1 下記の問いに答えよ。

(1) $x + y = 3$ のもとで、$x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

(2) $x^2 + y^2 = 1$ のもとで、$xy + x$ の最小値を求めよ。

設問 2 以下の積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} x^3 \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} x^{15} \, dx$

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Derive the minimum value of $x^2 + y^2$ subject to the constraint that $x + y = 3$.

(2) Derive the minimum value of $xy + x$ subject to the constraint that $x^2 + y^2 = 1$.

Q.2 Compute the following integrals.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^3 \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{15} \, dx$

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

削除、挿入、置換により数列 A を数列 B に変形する編集操作列を考える。A と B の各要素は以下の通りである。

$$\begin{array}{llll} A[1]=8, & A[2]=-4, & A[3]=1, & A[4]=-6 \\ B[1]=7, & B[2]=2, & B[3]=-4, & B[4]=3 \end{array}$$

任意の A の要素 a と B の要素 b に対し、a を削除するコストは $|a|$、b を挿入するコストは $|b|$、a から b へ置換するコストは $|a-b|$ とする。なお A の左端や右端にも挿入操作は可能である。以下では 2 つの編集操作列において、編集操作の順序のみ異なる場合は、同一の編集操作列とみなす。例えば図 1 のように、A の左端に 7 を挿入、8 を 2 に置換、−4 を削除、1 を −4 に置換、−6 を 3 に置換する編集操作列のコストは $7+6+4+5+9=31$ となるが、これは最小ではない。

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & -4 & 1 & -6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 2 & & -4 & 3 \end{array}$$

図 1: 編集操作列の例（順不同）

A$[i;j]$ を A の i 番目から j 番目の連続する要素で構成される数列とし、B$[i;j]$ も同様に定義する。M(m,n) を A$[1;m]$ を B$[1;n]$ に変形するコスト最小の編集操作列のコストとする。動的計画法に基づくアルゴリズムに関する以下の設問に答えよ。

設問 1　M$(1,1)$, M$(1,2)$, M$(1,3)$, M$(1,4)$ の値をそれぞれ求めよ。

設問 2　M$(2,1)$, M$(3,1)$, M$(4,1)$ の値をそれぞれ求めよ。

設問 3　M$(4,4)$ を M$(3,3)$, M$(3,4)$, M$(4,3)$ を用いて表現せよ。

設問 4　M$(4,4)$ の値を求めよ。

設問 5　A を B に変形するコスト最小の編集操作列をすべて図 1 のように示せ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Let us consider edit operation sequences consisting of deletion, insertion, and substitution that transform a number sequence A into another number sequence B. The elements of A and B are as follows:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A}[1] = 8, & \mathrm{A}[2] = -4, & \mathrm{A}[3] = 1, & \mathrm{A}[4] = -6, \\ \mathrm{B}[1] = 7, & \mathrm{B}[2] = 2, & \mathrm{B}[3] = -4, & \mathrm{B}[4] = 3. \end{array}$$

For any element a of A and any element b of B, the cost for deleting a is $|a|$, the cost for inserting b is $|b|$, and the cost for substituting a with b is $|a - b|$. Each insertion is allowed to the leftmost or rightmost position as well as between elements. Hereafter, for any pair of edit operation sequences, they are considered as the same edit operation sequence if only their orders are different. For example, as shown in Fig. 1, the cost for the edit operation sequence that inserts 7 to the leftmost position of A, substitutes 8 with 2, deletes -4, substitutes 1 with -4, and substitutes -6 with 3 is 7+6+4+5+9=31, which is not the minimum.

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & -4 & 1 & -6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 2 & & -4 & 3 \end{array}$$

Fig. 1: An example of an edit operation sequence. The operation order is arbitrary.

A number sequence $\mathrm{A}[i; j]$ consists of successive elements from $\mathrm{A}[i]$ to $\mathrm{A}[j]$. $\mathrm{B}[i; j]$ is also defined similarly. $\mathrm{M}(m, n)$ is the minimum cost of the edit operation sequence that transforms $\mathrm{A}[1; m]$ into $\mathrm{B}[1; n]$. Answer the following questions related to algorithms based on dynamic programming.

Q.1 Derive the values of M(1,1), M(1,2), M(1,3), and M(1,4).

Q.2 Derive the values of M(2,1), M(3,1), and M(4,1).

Q.3 Express M(4,4) using M(3,3), M(3,4), and M(4,3).

Q.4 Derive the value of M(4,4).

Q.5 Draw all edit operation sequences that transform A into B with the minimum cost using the notation as in Fig. 1.

修士課程　情報学基礎　【アルゴリズムとデータ構造】　| 問題番号 | F2–2 |

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

クイックソートについて以下の設問に答えよ.

設問 1
クイックソートの基本的な考え方を 100 文字程度で説明せよ.

設問 2
以下は整数列のクイックソートを行う C 言語のプログラムであるが，正しく動作しない. $\{3, 2, 6, 8, 5, 1, 7, 4\}$ を入力とする場合を例に，どこに問題があるかを指摘し，プログラムを修正した上で，この例を整列する過程を示せ.

```
void quicksort(int a[], int first, int last)
{
    int i, j, x, t;

    x = a[(first + last) / 2];
    i = first;  j = last;
    while (1) {
        while (a[i] <= x) i++;
        while (x <= a[j]) j--;
        if (i >= j) break;
        t = a[i];  a[i] = a[j];  a[j] = t;
        i++;  j--;
    }
    if (first < i - 1) quicksort(a, first, i - 1);
    if (j + 1 < last)  quicksort(a, j + 1, last);
}
```

設問 3
n 個のデータを整列するとき，クイックソートの平均計算量は $O(n \log n)$ であるが，最悪の場合は $O(n^2)$ となる．設問 2 の修正したプログラムで 8 個の整数を入力として整列するとき，この最悪の場合に相当する入力の例と，それがクイックソートによって整列される過程を示せ.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Answer the following questions about quicksort.

Q.1

Explain the basic idea of quicksort in about 100 Japanese characters or about 70 English words.

Q.2

The C program code below was intended to sort an integer array by quicksort, but it does not work properly. Suppose the input array is $\{3, 2, 6, 8, 5, 1, 7, 4\}$. Explain what is the problem in the code, describe how to fix it, and show the process of sorting the input array by the revised code.

```
void quicksort(int a[], int first, int last)
{
    int i, j, x, t;

    x = a[(first + last) / 2];
    i = first;  j = last;
    while (1) {
        while (a[i] <= x) i++;
        while (x <= a[j]) j--;
        if (i >= j) break;
        t = a[i];  a[i] = a[j];  a[j] = t;
        i++;  j--;
    }
    if (first < i - 1) quicksort(a, first, i - 1);
    if (j + 1 < last)  quicksort(a, j + 1, last);
}
```

Q.3

The time complexity of sorting n items by quicksort is $O(n \log n)$ on average, but in the worst case it becomes $O(n^2)$. When the revised code in Q.2 sorts an input array of 8 integers, show an input array that causes such a worst-case scenario, and show the process of sorting it.

2020年度10月期入学 / 2021年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
（専門科目）

2020年8月1日 12:00～14:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて13枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は下記6題であり、日本語と英語の両方で出題されている。このうちいずれか**2題を選択し**、解答しなさい。

5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;
the English translation below is provided for reference only

October 2020 Admissions / April 2021 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

August 1, 2020
12:00 - 14:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 6 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 2 questions.**

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問１　以下の用語について簡潔に説明せよ。図を用いても良い。

(1) 心の理論 (theory of mind)

(2) 主観的輪郭 (subjective contour)

(3) 場所細胞 (place cell)

(4) オペラント条件づけ (operant conditioning)

(5) 特徴統合理論 (feature integration theory)

設問２　ヒトの記憶特性を調べる実験を計画した。視覚刺激は図１(a) のようなアルファベットの大文字の中からランダムに選ばれた文字により構成されている。提示文字数は３ (1 行×3 文字)、4 (1 行×4 文字)、6 (2 行×3 文字)、8 (2 行×4 文字)、9 (3 行×3 文字)、12 (3 行×4 文字) からランダムに選択される。刺激は 50 ミリ秒 (ms) 提示される。実験参加者の課題は、刺激提示直後に、できるだけ多くの文字を思い出して口頭で回答することである(実験 1)。このとき、実験参加者が回答できた文字数は図 1(b) の白丸のようになった。また、提示された文字の一部を回答する追加実験を行った (実験 2)。この実験では刺激文字数 6、8、9、12 文字の条件を用いて、刺激提示終了と同時にビープ音を提示した。実験参加者は、ランダムに変化する音の高さに応じて一部の行のみを回答する。例えば、高い音が提示された場合、最上段の行の文字を回答する。このとき [利用可能文字数] = [回答できた文字数] × [提示行数] として図 1 (b) の黒丸に結果を示す。さらに、刺激文字数 12 の場合の刺激提示終了からビープ音提示までの時間間隔を 0 ms, 150 ms, 300 ms, 1000 ms として追加実験をしたとき、図 1 (c) に示す結果を得た (実験 3)。

(1) 実験 1 の目的を述べるとともに、その結果を考察せよ。

(2) 実験 2 において上記の式を用いて「利用可能文字数」として結果を示す理由を説明せよ。

(3) 実験 3 の目的を述べるとともに、その結果を考察せよ。

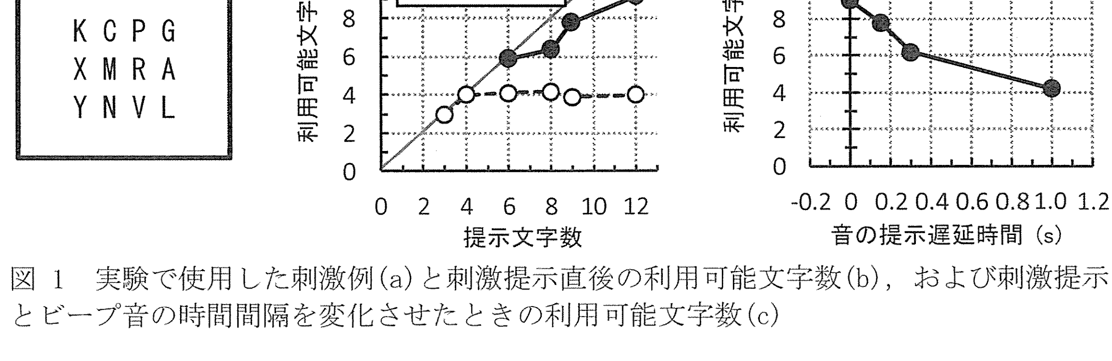


図 1　実験で使用した刺激例(a)と刺激提示直後の利用可能文字数(b), および刺激提示とビープ音の時間間隔を変化させたときの利用可能文字数(c)

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Give a brief explanation on each of the following items. Figures may be used.

(1) Theory of mind

(2) Subjective contour

(3) Place cell

(4) Operant conditioning

(5) Feature integration theory

Q.2 The following experiments were designed for investigating characteristics of human memory. A visual stimulus display shown in Fig. 1 (a) consisted of randomly selected uppercase letters of the alphabet. The number of presented letters was randomly selected from 3 (1 row × 3 letters), 4 (1 row × 4 letters), 6 (2 rows × 3 letters), 8 (2 rows × 4 letters), 9 (3 rows × 3 letters), and 12 (3 rows × 4 letters). The stimulus was presented for 50 milliseconds (ms). The task of participants was to verbally report the presented letters as many as possible immediately after the stimulus presentation (Experiment 1). The white circles in Fig. 1 (b) represent the number of letters that the participants correctly reported. An additional experiment was also conducted in which participants answered some of the letters presented (Experiment 2). In this experiment, the number of letters was selected from 6, 8, 9, and 12 letters conditions. A beep sound was presented simultaneously with the disappearance of stimulus presentation. Participants were required to report only the letters in a randomly selected row indicated by the pitch of sound. For example, if a high tone was presented, they had to report the letters in the top row. The black circles in Fig. 1 (b) show the result as [number of available letters] = [number of letters answered] × [number of rows presented]. An additional experiment was conducted for the 12 letters condition with varying time interval between the end of stimulus presentation and the onset of beep presentation: 0 ms, 150 ms, 300 ms, and 1000 ms (Experiment 3). The results are shown in Fig. 1 (c).

(1) Describe the purpose of Experiment 1 and discuss the result.

(2) Explain why the "number of available letters" shown in the above equation was used in Experiment 2.

(3) Describe the purpose of Experiment 3 and discuss the result.

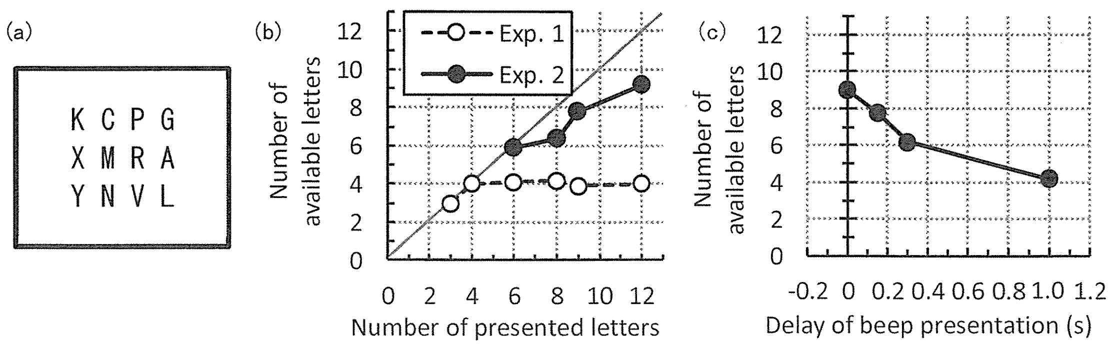


Fig. 1 A stimulus example used in the experiments (a), the number of available letters immediately after stimulus presentation (b), and the number of available letters when the time interval between stimulus presentation and a beep sound was varied (c).

設問 1 あるイベントの 1 秒間の発生回数 X が，パラメータ $\lambda = 2$ のポアソン分布に従うとする．以下の問いに答えよ． $e^2 \approx 7.39$, $e^{-2} \approx 0.135$ を用いてよい．

(1) ポアソン分布の確率密度関数を選べ．

$(a)\ f(x) = e^{\lambda}\lambda^{x}/x!$　　$(b)\ f(x) = e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$

$(c)\ f(x) = e^{\lambda}\lambda^{-x}/x!$　　$(d)\ f(x) = e^{-\lambda}\lambda^{-x}/x!$

(2) 確率 $P(X \geq N) < 0.1$ になるような最小の整数 N を求めよ．理由も示せ．

(3) このイベントの D 秒間の発生回数の合計を S とする．D の値が大きくなるにつれて，S の分布はある定理により正規分布に近づく．その定理の名前は何か．また S が近づく正規分布の平均と分散の値を求めよ．

設問 2 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数 Y から，標本サイズ $n\,(< 30)$ の標本 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ をランダムに抽出する．σ^2 が既知の場合は，μ の 95%信頼区間は以下のような手続で求められる．

「標本平均を $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/n$ とすると，$(\bar{Y} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$ は標準正規分布に従う．標準正規分布に従う確率変数 Z において$P(-c \leq Z \leq c) = 0.95$ が成り立つ c を求める．すると，95%信頼区間は $\left[\bar{Y} - c\sqrt{\sigma^2/n},\ \bar{Y} + c\sqrt{\sigma^2/n}\right]$ と計算される．」

では，σ^2 が未知のときに μ の 95%信頼区間を推定する手続を同様に説明せよ．

設問 3 以下の議論における統計的な推論の誤りを指摘せよ．

(1) 「1000 人の実験参加者に対して A と B の課題を行った．相関係数を計算した結果，2 つの課題の成績には個人間で有意な相関が見られなかった．この結果からは，A と B の課題で測定される人間の能力は独立していることが示唆される．」

(2) 「京都と東京の間に興味深い統計的な差が見られた．すなわち，京都では実験条件と統制条件の間に有意差が見られたが，東京では見られなかったのである．この地域差の理由を次回の研究で検討する予定である．」

設問 4 以下の統計用語のリストの中から 2 つを選んで，その意味を簡潔に説明せよ．

・ボンフェローニ補正
・分散分析における η^2
・ブートストラップ法
・検定の検出力

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Suppose the number of times an event occurs in one second, X, follows the Poisson distribution with $\lambda = 2$. Note that $e^2 \approx 7.389$, and $e^{-2} \approx 0.135$.

(1) Choose the probability density function of the Poisson distribution.

$(a)\ f(x) = e^{\lambda}\lambda^{x}/x!$ $\quad (b)\ f(x) = e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$

$(c)\ f(x) = e^{\lambda}\lambda^{-x}/x!$ $\quad (d)\ f(x) = e^{-\lambda}\lambda^{-x}/x!$

(2) Find the minimum integer N satisfying $P(X \geq N) < 0.1$, and explain why.

(3) Let S be the total number of times this event occurs in D seconds. A theorem says that the distribution of S approaches a normal distribution as D increases. Write the name of this theorem, and find the values of the mean and the variance of the normal distribution S approaches.

Q.2 Let $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ be a random sample of size n (< 30) from the normal distribution with the mean μ and the variance σ^2. If σ^2 is known, the 95% confidence interval of μ can be computed as follows: "Let $\bar{Y} = (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/n$ be the sample mean. $(\bar{Y} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$ follows the standard normal distribution. By using c that satisfies $P(-c \leq Z \leq c) = 0.95$ for random variable Z following the standard normal distribution, the 95% confidence interval of μ is computed as $\left[\bar{Y} - c\sqrt{\sigma^2/n},\ \bar{Y} + c\sqrt{\sigma^2/n}\right]$." Explain similarly the procedure to compute the 95% confidence interval of μ when σ^2 is unknown.

Q.3 Specify the errors in the following statistical arguments.

(1) "One thousand participants performed the task A and the task B. We computed the correlation coefficient of the task scores, and found no significant correlation across individuals between the two tasks. This suggests that the human abilities measured by the tasks A and B are independent."

(2) "We found an interesting statistical difference between Kyoto and Tokyo -- the experiment in Kyoto showed a statistically significant difference between the test and control conditions, while that in Tokyo did not. In the next study, we will examine the reason of this regional difference."

Q.4 Briefly explain the meanings of the two statistical terms chosen from the following list.

- Bonferroni correction
- η^2 in ANOVA
- Bootstrap method
- Statistical power of a test

予測問題を考える。入力を $x_i \in \mathbb{R}$、それに対応する出力を $y_i \in \mathbb{R}$ とし、学習データセット $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ が与えられている。なお、学習データセットは同時確率密度関数 $p(x, y)$ の分布から独立に生成されているとする。

ここで線形モデル

$$f(x; a, b) = ax + b$$

を用いる。なお、$a \in \mathbb{R}$ および $b \in \mathbb{R}$ は回帰係数である。

設問 1　以下の目的関数 $\widehat{J}(a, b)$ を最小化する $\widehat{a}$ および $\widehat{b}$ を学習データセット $\mathcal{D}$ を用いて導け。

$$\widehat{J}(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i; a, b))^2$$

設問 2　学習データセットが $\mathcal{D}' = \{(1, 2), (3, 3), (2, 1), (4, 5), (5, 4)\}$ で与えられている。この学習データセット $\mathcal{D}'$ から推定した回帰係数 $\widehat{a}$ および $\widehat{b}$ をそれぞれ計算せよ。

設問 3　以下の目的関数を考える。

$$J'(a, b) = \iint (y - f(x; a, b))^2 \; p'(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

なお、同時確率密度関数 $p'(x, y)$ は $p'(x, y) \neq p(x, y)$ である。
今、$p(x)$ を $p(x, y)$ の周辺確率密度関数とし、$p'(x)$ を $p'(x, y)$ の周辺確率密度関数とし、条件付き確率が $p(y|x) = p'(y|x)$ を満たすとする。$\boxed{}$ を $p(x)$ および $p'(x)$ を用いて答えよ。導出過程も示せ。

$$J'(a, b) = \iint (y - f(x; a, b))^2 \boxed{} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

設問 4 以下の目的関数

$$J(a, b) = \iint (y - f(x; a, b))^2 p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

の学習データセット $\mathcal{D}$ による近似は設問 1 の $\widehat{J}(a, b)$ で与えられる。
同様に、設問 3 の $J'(a, b)$ の近似 $\widehat{J}'(a, b)$ を学習データセット $\mathcal{D}$ および $p(x)$、$p'(x)$ を用いて導け。

設問 5　設問 4 の $\widehat{J}'(a, b)$ を最小化する $\widehat{a}$ および $\widehat{b}$ を学習データセット $\mathcal{D}$ および $p(x)$、$p'(x)$ を用いて導け。

We consider prediction problems. Let $x_i \in \mathbb{R}$ be an input and $y_i \in \mathbb{R}$ be the corresponding output, and we have a training data set $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Note that the training data set is drawn independently from the distribution with a joint probability density function $p(x, y)$.

We employ a linear model:

$$f(x; a, b) = ax + b,$$

where $a \in \mathbb{R}$ and $b \in \mathbb{R}$ are regression coefficients.

Q.1 Derive $\widehat{a}$ and $\widehat{b}$ that minimize the following objective function $\widehat{J}(a, b)$ using the training data set $\mathcal{D}$.

$$\widehat{J}(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i; a, b))^2$$

Q.2 The training data set is given as $\mathcal{D}' = \{(1, 2), (3, 3), (2, 1), (4, 5), (5, 4)\}$. Calculate each of estimated regression coefficients $\widehat{a}$ and $\widehat{b}$ using $\mathcal{D}'$.

Q.3 We consider the following objective function,

$$J'(a, b) = \iint (y - f(x; a, b))^2 \; p'(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

where the joint probability density function $p'(x, y)$ satisfies $p'(x, y) \neq p(x, y)$.
Now, $p(x)$ is the marginal probability density function of $p(x, y)$, $p'(x)$ is the marginal probability density function of $p'(x, y)$, and the conditional probabilities satisfy $p(y|x) = p'(y|x)$.
Answer $\boxed{}$ with $p(x)$ and $p'(x)$. Calculation procedure must also be included in the answer.

$$J'(a, b) = \iint (y - f(x; a, b))^2 \boxed{}\, p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Q.4 Using the training data set $\mathcal{D}$, the objective function,

$$J(a, b) = \iint (y - f(x; a, b))^2 p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

is approximated as $\widehat{J}(a, b)$ in Q.1.
Similarly, derive the approximation of $J'(a, b)$ in Q.3 (i.e., $\widehat{J}'(a, b)$) using the training data set $\mathcal{D}$, $p(x)$, and $p'(x)$.

Q.5 Derive $\widehat{a}$ and $\widehat{b}$ that minimize the objective function $\widehat{J}'(a, b)$ in Q.4 using the training data set $\mathcal{D}$, $p(x)$, and $p'(x)$.

記号の集合 $\{a, b, c, d\}$ をアルファベットとする記憶のない定常情報源 A を考える。A における各記号の生起確率 p は

$p(\mathrm{a}) = 3/8,\quad p(\mathrm{b}) = 1/4,\quad p(\mathrm{c}) = 1/4,\quad p(\mathrm{d}) = 1/8$

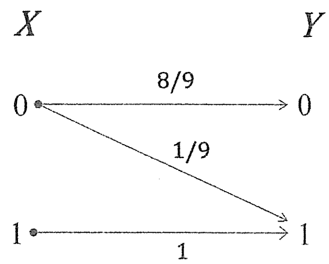
とする。

C_1	
a	0
b	01
c	011
d	111

設問 1　情報源 A のエントロピー $\mathrm{H}(A)$ を求めよ。

設問 2　A の各記号を右表の符号 C_1 により $\{0, 1\}$ に 2 元符号化することを考える。符号 C_1 は一意に復号可能か、理由とともに示せ。

設問 3　情報源 A から得られる十分長い記号列を符号 C_1 で 2 元符号化した系列を考える。この 2 進系列から任意に 1 bit を取り出すとき、取り出した記号が 1 である確率を求めよ。



設問 4　右の通信路線図によって与えられる非対称の 2 元通信路を考える。X の生起確率が設問 3 のように与えられるとき、相互情報量 $\mathrm{I}(X;Y)$ を求めよ。

設問 5　情報源 A から得られる記号を右表の符号 C_2 で 2 元符号化し、設問 4 の通信路で伝送して C_2 で復号することを考える。復号された記号を事象 B とするとき、相互情報量 $\mathrm{I}(A;B)$ を求めよ。

C_2	
a	00
b	01
c	10
d	11

設問 6　情報源 A が生成する記号列を設問 4 の通信路で伝送する際の 2 bit の固定長 2 進符号として、符号 C_2 が最適かどうかについて論じよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Consider a stationary memoryless source A which has a source alphabet of 4 symbols { a, b, c, d }. The source A produces each symbol with probability p, where

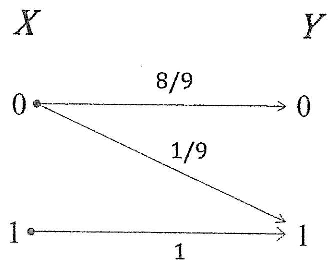
$$p(\mathrm{a}) = 3/8, \quad p(\mathrm{b}) = 1/4, \quad p(\mathrm{c}) = 1/4, \quad p(\mathrm{d}) = 1/8.$$

Q.1 Compute H(A), the entropy of the source A.

Q.2 Consider the code C_1 in the right table for encoding the symbols of A into binary symbols { 0, 1 }. Is the code C_1 uniquely decodable? Answer with a reason.

	C_1
a	0
b	01
c	011
d	111

Q.3 Assume that a long enough sequence of symbols produced from the source A is encoded into a binary sequence using the code C_1. Imagine picking up one bit at random from the binary sequence. What is the probability that this symbol is a 1?



Q.4 Consider an asymmetric binary communication channel defined by the righthand diagram. Suppose that the probability of occurrence of X is given as in Q.3. Compute the mutual information I (X; Y).

Q.5 Assume that symbols produced from the source A are encoded using the code C_2 in the right table, transmitted over the communication channel in Q.4, and decoded using C_2. Let B be the event of the decoded symbols. Compute the mutual information I (A; B).

	C_2
a	00
b	01
c	10
d	11

Q.6 Argue whether the code C_2 is optimal or not as a 2-bit fixed-length binary code for transmitting symbols produced from the source A over the communication channel in Q.4.

連続時間信号 $f(t)$ のフーリエスペクトル $F(\omega)$ は，$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で与えられる．ここで j は虚数単位である．また，長さ N の有限長離散信号 $x[n]$ $(n=0,\ldots,N-1)$ の離散フーリエ変換を $X[k]$ とする．

設問 1　$f(t)$ が偶関数，すなわち $f(x)=f(-x)$ であるとする．$f(t)$ のフーリエスペクトルは，

$$F(\omega)=2\int_0^{\infty} f(t)\,\boxed{\text{(A)}}\,dt$$

となる．$\boxed{\text{(A)}}$ を求めよ．計算過程も示すこと．

設問 2　$x[n]$ を s だけ循環推移させた信号 $x_s[n]$，

$$x_s[n]=\begin{cases} x[N+n-s] & (n<s) \\ x[n-s] & (n\geq s) \end{cases}$$

を考える．$x_s[n]$ の離散フーリエ変換は $\boxed{\text{(B)}}\,X[k]$ となる．$\boxed{\text{(B)}}$ を求めよ．計算過程も示すこと．

設問 3　長さ $2N$ の有限長離散信号 $y[n]$，

$$y[n]=\begin{cases} x[n] & (0\leq n<N) \\ x[2N-1-n] & (N\leq n<2N) \end{cases}$$

を考える．$y[n]$ の離散フーリエ変換 $Y[k]$ は，

$$Y[k]=2\,\boxed{\text{(C)}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\boxed{\text{(D)}}\right)$$

となる．$\boxed{\text{(C)}}$ と $\boxed{\text{(D)}}$ を求めよ．計算過程も示すこと．

設問 4　$x[n]$ に対する変換

$$X_{DCT}[k]=\alpha_k\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\boxed{\text{(D)}}\right),\ \alpha_0=1/\sqrt{N},\ \alpha_k=\sqrt{2/N}$$

は離散コサイン変換 (DCT-II) と呼ばれ，JPEG などのデータ圧縮に用いられる．離散フーリエ変換と比較してデータ圧縮における離散コサイン変換の利点を述べよ．

The Fourier spectrum of a continuous-time signal $f(t)$ is given by $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$, where j denotes the imaginary unit. Let $X[k]$ denote the discrete Fourier transform of a finite-length discrete signal of length N, $x[n]$ $(n = 0, \ldots, N-1)$. Answer the following questions.

Q.1 Suppose that $f(t)$ is an even function, that is $f(x) = f(-x)$. The Fourier spectrum of $f(t)$ is given by

$$F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t) \boxed{\text{(A)}} \, dt.$$

Answer $\boxed{\text{(A)}}$. Calculation procedure must also be included in the answer.

Q.2 Let $x_s[n]$ be the circular shifted version of $x[n]$ by s,

$$x_s[n] = \begin{cases} x[N+n-s] & (n < s) \\ x[n-s] & (n \geq s). \end{cases}$$

The discrete Fourier transform of $x_s[n]$ is given by $\boxed{\text{(B)}} X[k]$.
Answer $\boxed{\text{(B)}}$. Calculation procedure must also be included in the answer.

Q.3 Let $y[n]$ be a finite-length discrete signal of length $2N$,

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & (0 \leq n < N) \\ x[2N-1-n] & (N \leq n < 2N). \end{cases}$$

The discrete Fourier transform of $y[n]$ is given by

$$Y[k] = 2 \boxed{\text{(C)}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\boxed{\text{(D)}}\right).$$

Answer $\boxed{\text{(C)}}$ and $\boxed{\text{(D)}}$. Calculation procedure must also be included in the answer.

Q.4 The transform of $x[n]$,

$$X_{DCT}[k] = \alpha_k \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\boxed{\text{(D)}}\right), \alpha_0 = 1/\sqrt{N},\ \alpha_k = \sqrt{2/N}$$

is known as a discreate cosine transform (DCT-II), and is used in data compression such as JPEG. Explain an advantage of the discrete cosine transform compared to the discrete Fourier transform in terms of data compression.

アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語 $L_1 = \{a(a|b)^n \mid n \geq 0\}$ と $L_2 = \{(a|b)^n b \mid n \geq 0\}$ について以下の問いに答えよ。ここで $(a|b)^n$ は、a または b の n 回の繰り返しを表す。

設問 1 L_1 を生成する文法 $G_1 = (\{S\}, \Sigma, P_1, S)$ の生成規則 P_1 を書け。ここで S は開始記号である。

設問 2 $L_3 = L_1 \cap L_2$ を受理し、初期状態 q_1 と最終状態 q_3 を含む 3 状態からなる非決定性有限オートマトン M_3 の遷移表を示せ。

設問 3 オートマトン M_3 と等価な状態数最小の決定性有限オートマトンの遷移表を示せ。ここで決定性有限オートマトンの遷移表は、全ての遷移を明示しているものとする。

設問 4 正則言語の部分集合は必ずしも正則言語ではない。これを L_3 と $L_4 = \{a^m b^m \mid m \geq 1\}$ を例として示せ。

設問 5 $L_5 = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 1\}$ が文脈自由言語であるか否かを答えよ。さらに反復補題 ($\boldsymbol{uvwxy}$ 定理) を用いてそれを証明せよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Answer the following questions about languages $L_1 = \{a(a|b)^n \mid n \geq 0\}$ and $L_2 = \{(a|b)^n b \mid n \geq 0\}$ on an alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, where $(a|b)^n$ denotes n repetitions of a or b.

Q.1 Write the production rule set P_1 of the grammar $G_1 = (\{S\}, \Sigma, P_1, S)$ generating L_1, where S is the start symbol.

Q.2 Write the transition table of a nondeterministic finite automaton M_3 accepting $L_3 = L_1 \cap L_2$ and consisting of three states including the start state q_1 and a final state q_3.

Q.3 Write the transition table of a deterministic finite automaton with the smallest number of states equivalent to the automaton M_3. Here the transition table of a deterministic finite automaton must explicitly specify all the transitions.

Q.4 A subset of a regular language is not always a regular language. Demonstrate this by taking L_3 and $L_4 = \{a^m b^m \mid m \geq 1\}$ as examples.

Q.5 Answer whether $L_5 = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 1\}$ is a context-free language or not. Then prove it using the pumping lemma ($\boldsymbol{uvwxy}$ theorem).